じぐざぐ進む数学の授業を作る②～教材作りのプロセスを楽しむ

（原題：じぐざぐ進む数学の授業を作る②～手探りの面白さ再発見！）

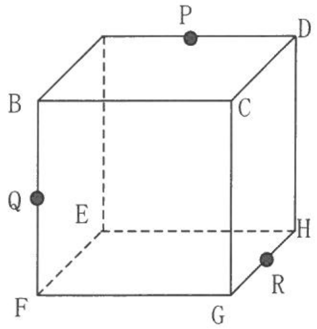
佐藤　英二

（明治大学文学部）

分科会担当も２年目になります。昨年は，誌上ワークショップを試みましたが，今年は，半年にわたる私自身の教材作りを振り返ってみたいと思います。ワークショップで取り上げた問題は最初に挙げておきますので，ワークショップに参加していない方は，まずご自身で問題に取り組んでから，２）以降をお読みください。

１） 取り上げた問題

問題　右の立方体 V：ABCD-EFGH を平面 PQR で切った切り口は何ですか。ただし，P，Q，R はそれぞれ辺 AD，辺 BF，辺 GH の中点とします。

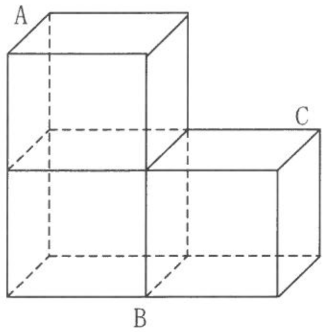


この問題はいろんな方法で解けます。紙と鉛筆だけで解くとすると，どうやりますか。いろんな物を使って良いとすると，どのような方法がありますか。また，生徒が答えを見つけるようにするには，どのような働きかけをすると良いでしょうか。以下では，これらの問いに対する私自身の追求の過程を述べていきます。

２） 教材の種

昨年も書いたことですが，教材の種はいろんなところにあります。この問題の種は中学校の入試問題でした。

立方体を右の図のようにつないだ立体を，３点 A，B，C を通る平面で切ったとき，切り口の図形の面積は，三角形 ABC の面積の何倍ですか。



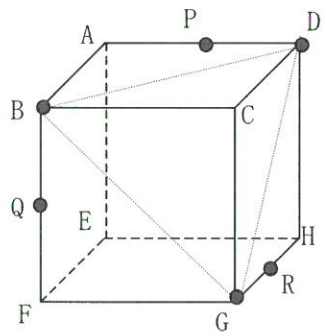
８月の都教委のワークショップの素材を探していた時，偶然この問題に出くわしました。面白い問題ですが，ワークショップの素材としては，難点があります。立体の形が作為的で，答えもきれいではないからです。無意味な複雑さは，問題を解く楽しみを削ぎます。問題を解くむずかしさと面白さはそのままで，もっとシンプルな問題にできないでしょうか。

そこで，この問題の本質的な難しさ（と面白さ）がどこにあるか，考えてみました。切

り口の図形の面積と三角形 ABC の面積の比を求めることや，その際の計算にも難しさはありますが，この問題の本質的な難しさは，切り口がすぐにはわからない点にあると私は考えました。切り口の形がわからなければ，手も足も出ないからです。

なぜ切り口がわかりにくいかというと，立体が立方体を 3 個つないだ複雑な形をしているからです。しかしその複雑さに作為性が認められます。この作為性をなくして，問題をよりシンプルにしつつ，切り口を探す過程をさらに楽しめる問題を作る－これが私の課題になりました。

図形は思い切って立方体にしました。しかし，右図で，頂点 B，G，D を通る平面でこの立方体を切った時の切り口はという問題は，簡単すぎます。B と G が立方体の同じ面上にあるからです。3 点のうちの 2 点が立方体の同じ面の上に乗っていると，その 3 点を通る平面でこの立方体を切った切り口がすぐにわかってしまいます。ということは，切り口探しを難しくするには，どの 2 点も同じ辺や面に乗っていないようにすれば良いということになります。このような推論を経て，P，Q，R を通る平面で切った切り口を求める問題を作りました。P，Q，R の位置は，できるだけ作為性をなくしたいという考えから，3 辺の中点としました。



答えを言ってしまうと，切り口は正 6 角形になります。この事実は，教科書にも載っているくらい，よく知られたものです。私もこの結果を知っていました。しかしながら，これをワークショップの題材にするのは，躊躇してきました。この問題をそのまま出しただけでは，問題を解く糸口を参加者が見つけることが難しいからです。参加者が何らかの探索的な活動を経て，問題を解く糸口を見つけられるのでなければ，私がヒントを出すしかありません。しかもそのヒントは，答えを知っている私が，参加者の気づきにくい箇所を断片的に教えたものにすぎません。また，私が巧妙な教具を作って，それを見せながら，「ほら，これでわかりますね」とプレゼンしたとしても，面白いワークショップにはなりません。結局，教師の出した問題を教師自身が説明して，生徒に聞いてもらうのと変わらないからです。答えを知っている教師が生徒の探求活動と関わりのないヒントを出したり，生徒が思いつきもしないような巧妙な教具を持ち出したりするのではなく，問題に出くわした人が試行錯誤を含む探索的な活動を通して，問題を解く糸口を見つけていく－そのような働きかけや環境作りはできないものでしょうか。

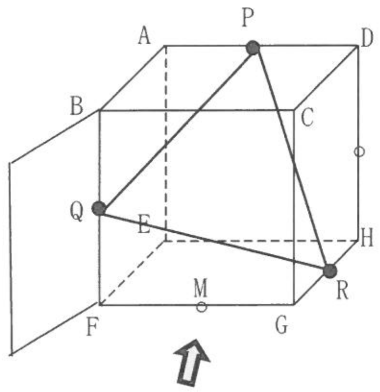
前回のワークショップと同様，ここでも，解決の糸口は具体的な物でした。紙と鉛筆だけでは解ける人と解けない人に分かれてしまう問題でも，具体的な物を媒介にすれば，いろんな気づきを誘発できるからです。こうして，模型を作りながら考えるという，ワークショップの基本的なコンセプトができました。

3）教材化～生徒が問題の解を見つけていく自然な文脈をデザインする

立体の切り口を実験的に求める方法としては，ようかんや大根を切ってみる方法があり

ます。これも面白いでしょう。しかしやってみたらわかることですが，立方体のようかんを切って，偶然切り口が正6角形になることがわかったとしても，それはあくまで実験から得られた仮説に過ぎず，その仮説を証明するための糸口を見つけることは容易ではありません。結果の予想はできても，それを活かすことが難しいのです。

そこで私は，工作用紙で立方体を作ることにしました。30cm×40cm の工作用紙で立方体を1個作ることを考えて，1辺を 10cm にしました。問題は，平面 PQR をどのように表現するかです。P，Q，R を通る平面そのものを紙で作ってみる手もあるでしょう。しかし，今回私は，P，Q，R の間を糸でつないで，糸で平面を表現する方法を試しました。まず，工作用紙に立方体の展開図を書き，それを切り抜いて折り曲げ，立方体を作ります。その後ピンで立方体の P，Q，R に穴を開けて，そこに針で PQ 間，QR 間，RP 間に糸を通していきます。作業の手順上，完全な立方体ではなく，一つの面だけ開いた箱の形にする必要があります。そして P，Q，R の穴に瞬間接着剤をたらして，そこで糸を固定すれば，三角形 PQR ができます。三角形 PQR の境界がさらに広がっていると考えれば，仮想的ですが，平面が見えてきます。



そして，できあがった立方体を手に持って傾けたり，回したりしながら，平面って何だろうと改めて考えてみました。そして何の気なしに，PQ，QR，RP の3本のうち，2本の糸が一直線に見える位置に目を持ってきたら，ちょうどその時，視線が平面 PQR 上に乗っていることに気がつきました。まったいら（平面）とは，2本の直線が1本に重なって見える時に目とその1本の直線が作るものなんですね。こうして，平面 PQR が少しずつ実体のあるものに感じられてきました。そして，PQ，QR，RP の3本のうち，2本の糸が一直線に見える状態を保ちながら，立方体をゆっくり動かしていくと，その視線が辺 FG と交差する点が見えてきました。手元に立方体がある人は，図の矢印（ ⇧ ）の方向から見てください。平面 PQR と辺 FG の交点が見えてくるでしょう。

その点は辺 FG のどこにあるでしょうか。探ってみると，大体辺 FG の中点 M らしいことがわかってきます。こうして，この平面 PQR で立方体 V を切った切り口が辺 FG の中点 M を通るらしいという仮説が生成できました。

次に，切り口の正6角形の他の頂点を見つける作業に取りかかりました。私は，答えが辺 DH の中点と辺 AB の中点であることを知っていたので，参加者が自然な探索活動の結果として，それらの2点を見つけることができるか，確かめたのです。これも大丈夫そうです。

こうして，この模型を使えば，それほど不自然な働きかけを用いなくても，重要な気づきを引き出せることがわかりました。ワークショップの素材としては十分有望です。

しかしまだ難点がありました。ここでの気づきを証明に結びつけられるかという点です。少し頭をひねりました。しかし，平面 PQR が辺 FG の中点 M を通ることだけに論証の対象を

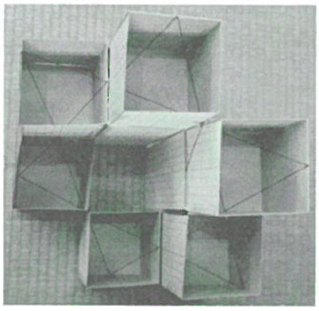
絞れば，直線 PQ と平面 EFGH の交点を求めて，それと点 R を結んだ直線が辺 FG の中点 M を通ることを示せばよいことがわかってきました。立方体を工作用紙の上に置き，直線 PQ に工作用紙で作った定規を沿わせて，直線 PQ を延長し，PQ の延長線が平面 EFGH とどこでぶつかるか，探しました。そこに印を付けて，そこから点 R まで直線を引くと，確かにその直線は辺 FG の中点 M を通りました。工作用紙に印刷されている線はグラフ用紙の罫線そのものなので，それを活用すれば，今の推論の過程をそのまま厳密な証明に置きかえることができます。

以上の作業を終えた状態で，8 月のワークショップに臨みました。

4) 教材をブラッシュアップする～12 月に向けて

8 月のワークショップの参加者の方々には，おおむね満足していただいたと思っています。しかし，私にはまだ満足できない点がありました。確かに，模型を使って証明までやった上で，立方体 V をはさみで切って切り口が平面になっていることを直観的に確かめることもできたので，一つの物語としての着地点はあるのですが，まだびっくりするような美しさを感じて終わるというには不十分でした。そこで，何か，それまで作業してきたことの意味がはっとわかるような，素晴らしい着地点はないか，探してみました。

念頭にあったのは，結晶格子でした。金属の代表的な結晶格子には，面心立方，体心立方，六方最密の三種類の格子があり，そのうち，最密構造は，面心立方と六方最密の 2 つです。このことが今回作った模型と何か関係しているのではないかと思い，いろいろ試してみました。結局，うまく話をつなげられずに今に至っています。



しかし，模型をいくつか並べて考えているうちに，平面 PQR をもっと大きくできないかという思いが浮かび上がってきました。こうしてできたのが，正三角形を上下にくっつけた星形（右図）です。これは，私が見てもきれいだったので，教育会のワークショップに取り入れました。その過程で，左右対称な立方体を 3 個ずつ作る必要があることがわかりました（次節②）。着地点の問題はとりあえずクリアーしました。

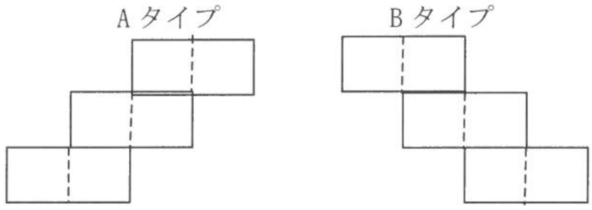
しかし，夏のワークショップでグループの議論がいま一つ深まらなかった理由は，他にもあったような気がしました。その時は，模型を一人 1 個ずつ作ってもらい，それを手に持って考えてもらいました。教具を何人かに 1 個ずつ配るよりも，1 人に 1 個ずつ配って，一人ひとりが実験に取り組めた方が，授業は面白くなる－これは常識的な考えでしょう。しかし実際には，一人ひとりが模型を手に持つと，あれこれ各自で考えることはあっても，互いに話をすることはなくなっていきます。話をする必然性がないからです。逆に，立方体を大きくして，それをグループで 1 個ずつ作ってもらったら，いろんな方向から一つの模型を同時に眺めることになり，ちょっとした気づきがより活発にやりとりされるのではないか。このように考えました。そこで，立方体の 1 辺を 20cm にしました。

5） 教材と生徒との出会いを楽しむ～当日のワークショップ

以上の準備を経て，当日を迎えました。大きな立方体をグループに1個ずつ作ることや，その立方体を最後に6個集めてきて，大きな星形を作ることは初めてだったので，少し緊張しました。しかし，感想文からも読み取れるとおり，満足できる結果になったと思います。以下，おおよその段取りを述べて終わりにしたいと思います。

① 問題を提示した後，工作用紙などを配布する。

② 工作用紙で20cm×40cmの長方形を作り，それを3枚貼り合わせて，立方体を作る。なお，3枚の貼り方は2通りあるので，事前にAタイプのグループとBタイプのグループを指定した。



③ ピン，針，糸，接着剤を使って，PQ間，QR間，RP間に糸を張ってもらう。ここでは，ある学生さんが，接着剤ではなく，クリップを使えば，楽に三角形PQRが作れることを教えてくれた。

④ 平面PQRで立方体を切った切り口の形を考えてもらう。2本の糸が1本に見えるように，視線を動かす人が出てきたら，それを皆に説明してもらう。

⑤ 切り口が予想できたら，平面PQRが辺FGの中点であることを証明するには，どうしたら良いか，考えてもらう。ここでは，直線PQを工作用紙で延長したグループの他，PからQに引っ張った糸をさらに延長することで，直線PQの延長線を作り出すグループもあった。

⑥ 各グループとも証明がだいたいできた時点で，グループから1個ずつ立方体を教室の前に持ってきてもらい，それを組み合わせて大きな星形を作った。

⑦ 最後に，実際に立方体を切ってもらい，予想が当たったことを確かめてもらった。

ワークショップの参加者の皆さんは，半年間にわたる教材開発のある一面を経験してもらったことになります。この教材開発は終わったわけではなく，今後も続くでしょう[1]。教材を作る楽しみは，授業での生徒との出会いとともに続くのです。

註

1 実際に，本年1月には日本女子大学西生田キャンパスにて小学校教員志望の学生さんと現職の先生を対象に試してみました。