

M 先【II 期入試】

2 0 2 6 年 度 大 学 院 入 学 試 験 問 題

先端数理科学研究科 現象数理学専攻 (博士前期課程)

科 目 : 専 門 科 目

◎試験時間は 90 分です.

外国人留学生志願者のみ, 英語による解答を認めます.

◎問題は 2 題出題されています. 2 問とも解答しなさい.

問題用紙は, この表紙を含めて 3 ページあります.

解答用紙は, 問題ごとに 1 枚, 全部で 2 枚あります.

問題用紙, 解答用紙はすべて回収します.

受験番号: _____

氏名: _____

問 1.

[I]

(1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \sqrt{\pi}, 0 < x \leq y\}$ とするとき, 重積分

$$\iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

の値を求めよ.

(2) 3次元空間において, 放物面 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 9 - z\}$ と平面 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ によって囲まれた領域を R とするとき,

$$\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

の値を求めよ.

(3)

$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t, \\ z = x^2 + 3xy + 5y^2 \end{cases}$$

とするとき, $\frac{dz}{dt}$ を求めよ.

[II]

(1) $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ とする. ただし,

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1 + x, x^2 + y^2 = 1\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 + x, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

である. このとき, 面積分 $\iint_S z dS$ の値を求めよ.

問 2.

[I]

次の行列 $R(\theta) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ を回転行列という.

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

ここで, $0 \leq \theta < 2\pi$ とする.

(1) 平面上の点

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

を考える. 角度 $\theta = \pi/4$ の回転行列を A とする. $A\boldsymbol{x}$ を求めよ.

(2) 角度 θ の回転行列を A とする. 任意の実ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

に対して, $\|\boldsymbol{x}\| = \|A\boldsymbol{x}\|$ を示せ. ただし, $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ とする.

[II]

次の行列 A について, 以下の問いに答えよ.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -12 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(1) A の固有値をすべて求め, それぞれに対応する固有ベクトルを求めよ.

(2) A^5 , A^{-1} および $A + 2I$ の固有値を求めよ. ただし, I は単位行列とする.