解答例

(1) (a)

$$a_n = \frac{4}{n(n+1)}$$

(b) 収束する。級数の和は以下の通り。

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{4}{j(j+1)} = 4\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)$$

が成立する。よって、

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{4}{j(j+1)} = 4$$

(2) (a) 点 (p, p^2) におけるこの放物線の接線の傾きは $2p$ である。$p \neq 0$ が成立するとき、法線の傾きは $-\frac{1}{2p}$ である。よって、$p \neq 0$ が成立するとき、点 (p, p^2) における法線は、

$$y = -\frac{1}{2p}(x - p) + p^2$$

となる。また、$p = 0$ が成立するとき、明らかにその法線は $x = 0$ が成立する。

(b) 前問 (a) の結果より、与えられた放物線の点 (p, p^2) における法線は、$p = 0$ のとき、その法線は $x = 0$ が成立し、明らかに 1 本しか存在しない。よって、$p \neq 0$ が成立する。このときの法線は、

$$y = -\frac{1}{2p}(x - p) + p^2$$

が成立し、この直線が点 (u, v) を通るので、

$$v = -\frac{1}{2p}(u - p) + p^2$$

より、

$$2p^3 + (1 - 2v)p - u = 0$$

が成立する。この式の左辺を $f(p)$ と置くことにする。$f(p)$ の相異なる実数解が 2 つ存在するとき、与えられた放物線の点 (p, p^2) における法線は 2 つ存在する。ここで、$f(p)$ を微分すると、

$$f'(p) = 6p^2 + (1 - 2v)$$

が成立する。ここで、$1 - 2v \geq 0$ が成立するとき、$f'(p) \geq 0$ が成立し、$f(p)$ は単調増加となる。よって、$f(p)$ の実数解は 1 つだけ存在する。

そこで以下では、$1-2v<0$ が成立する場合を考える。ここで、$f'(p)=0$ が成立するとき、

$$p=\pm\sqrt{\frac{2v-1}{6}}$$

が成立する。$f(\sqrt{\frac{2v-1}{6}})=0$、もしくは $f(-\sqrt{\frac{2v-1}{6}})=0$ が成立するとき、$f(p)$ は実数解を 2 つ持つ。よって、

$$f(\sqrt{\frac{2v-1}{6}})=\frac{2-4v}{3}\sqrt{\frac{2v-1}{6}}-u$$

が成立するので、$f(\sqrt{\frac{2v-1}{6}})=0$ が成立するとき、$\frac{2-4v}{3}\sqrt{\frac{2v-1}{6}}-u=0$ が成立する。また、

$$f(-\sqrt{\frac{2v-1}{6}})=-\frac{2-4v}{3}\sqrt{\frac{2v-1}{6}}-u$$

が成立するので、$f(-\sqrt{\frac{2v-1}{6}})=0$ が成立するとき、$-\frac{2-4v}{3}\sqrt{\frac{2v-1}{6}}-u=0$ が成立する。

以上より、$1-2v<0$ かつ $u=\pm\frac{2-4v}{3}\sqrt{\frac{2v-1}{6}}$ が成立するとき、放物線 $y=x^2$ の法線は 2 つ存在する。