

2019年4月1日より同9月18日まで、ユトレヒト大学情報計算科学科において在外研究を行った。

研究テーマは、木幅問題に対する実用的なアルゴリズムの開発である。ユトレヒト大学における受け入れ教員である Hans Bodlaender 教授は、木幅問題の理論における第一人者であり、同教授およびそのグループと議論をしながら研究を進めることのできる環境は、このテーマの研究にとって理想的であった。

在外研究の開始に先立って、木幅を正確に計算する厳密アルゴリズムについて、いくつかの重要な成果を挙げていたが、在外研究においては木幅の上界を計算する発見的な手法に重点を置く計画であった。上界の良いアルゴリズムは、厳密アルゴリズムのひとつの要素として重要であるだけでなく、厳密な木幅の計算が絶望的であるような規模のグラフに対する実用的なアプローチとしても重要な意味を持っている。

枠組みとしては、局所探索法あるいは逐次改善法と呼ばれる手法をとる。すなわち、貪欲解法によって求めた木分解から出発して、逐次より小さい幅を持った木分解に改良して行く。改良への自然なアプローチとして、現在保持している木分解のなかで、最大のバッグを保持する部分木に着目してその部分木を部分的に改良する木分解を求めるという手法から出発した。現地到着から一月ほどの試行錯誤の後、HeartBeat（拍動）と呼ぶ手法に想到した。これは、改良の対象とする部分木の頂点集合を heart と呼び、heart の拡大と縮小を繰り返しながら、改良を試みるものである。Heart が小さすぎると、改良そのものが存在しない恐れがあり、一方 heart が大きすぎると改良は存在してもそれを発見することが困難であるという問題がある。HeartBeat は、

heart の拡大と縮小を繰り返すことにより、改良を発見する機会を増大させる狙いを持っている。

この考えを実装し実験した結果、既存の手法に対して競合できる結果を得た。この実験結果を滞在先学科のアルゴリズムグループのセミナーにおいて、6月11日に発表した。

その後、HeartBeat 法の改良のための研究を続けた。少しずつ改良は得られたものの、HeartBeat 法の限界もしだいに見え始めた。一番大きな問題は、ある部分木の改良のために費やした計算の努力が、その改良を失敗した時点で全く無駄になってしまうことである。7月の末にようやく、この問題を克服する方法に想到した。この方法は、Bouchitte と Todinca による、木幅の限るアルゴリズム (BT アルゴリズム) に基づいている。BT アルゴリズムでは、まず与えられたグラフ  $G$  の潜在極大クリークをすべて列挙し (その集合を  $P(G)$  と置く)、 $P(G)$  に基づいた動的計画法によって  $G$  の木幅を決定する。我々の方法のもとになる事実は、 $P(G)$  の任意の部分集合  $P$  に対してもこの動的計画法アルゴリズムを実行することができ、結果として  $G$  の木幅に対する上界が得られることである。この事実をもとにして、現在解として木分解の代わりに潜在極大クリークの集合  $P$  を保持する逐次改善法を考えることができる。 $P$  から求まる  $G$  の木幅の上界を  $tw(G, P)$  で表すとき、 $tw(G, P') < tw(G, P)$  であるような  $P'$  を求めることが  $P$  の改良である。仮に  $tw(G, P') = tw(G, P)$  であっても、 $P'$  が  $P$  より豊かであって、将来の改良に結び付く可能性がある。このような形で、改良のための努力が、改良に失敗した場合でも必ずしも無駄にならないところにこの方法の利点がある。

このアプローチでアルゴリズムを設計し、実装と実験を行った。HeartBeat 法を含めた既存アルゴリズムに対して、グラフの頂点数は木幅が極端に大きい場合を除いて、明白に勝る性能を持つことが明らかになった。この結果は、滞在先学科のアルゴリズムグループのセミナーにおいて、9月17日に発表した。また、この結果を論文草稿 (文献1) としてまとめた。

在外研究の6か月の間に、ひとつのまとまった研究成果を挙げる得たことに満足している。さらなる改良のアイデアや課題も多数得られたので、今後も地道に研究を続けていきたい。

なお、6月下旬には、木幅の厳密アルゴリズムについての研究成果（在外研究開始前のもの）を国際会議 SEA2019（ギリシア）において発表した。

#### 文献

- (1) Tamaki, Hisao. "A heuristic use of dynamic programming to upperbound treewidth." *arXiv preprint arXiv:1909.07647* (2019).