じぐざぐ進む数学の授業を作る～探求的活動のデザインに向けて

佐藤 英二（明治大学）

はじめに

第6分科会では、現職の先生方の参加を想定して数学教育のワークショップを企画しました。私は、現職教員向けのワークショップについて5年ほどの経験がありますが、今回は、現職の先生方の中に学生が入ることで、教員だけでは生じない経験の交流が生まれることを期待しました。結果は、学生の参加が予想以上に多く普段の大学の授業のような雰囲気になりましたが、教室の前方では先生方と学生さんの楽しくかつ緊張を含んだやりとりを見ることができました。後ろの席を陣取って物見遊山で参加した学生さんも、途中から真剣になって友人と議論する姿を見せてくれました。授業の中に活動を取り入れる意義や、グループを作って共同で学ぶ意義を知ってくれたのではないかと思います。さらに、当日は生田で数学科教育法を担当していただいている一楽重雄先生もおいでいただき、面白かったとの望外の感想をいただきました。お忙しい中で参加してくださった現職の先生方、一楽先生、学生の皆さんに感謝します。

本稿は分科会の報告ということになっていますが、せっかくなので、今回参加されなかった方も紙上で参加できるものにしたいと思います。私のワークショップでは、参加者は私の話を聞くだけではなく、紙を切ったり、周りと相談したりと、まさに体を動かして活動することになっています。本稿をお読みになる方は、まず、はさみ、三角定規、分度器、30cm 定規、コンパス、工作用紙、段ボール、ピン（または画鋲）、グラフ用紙（通常のもの）、丸型グラフ用紙（何これ？という方は検索を）をご用意ください。周りの人をつかまえて、一緒に活動すると面白さも増すでしょう。

以下、当日取り上げた問題（授業の種）に取り組んでいただいた後（1.）、その問題を授業に組み替える課題を考えていきます（2.）。その後、当日の授業展開に沿って、個々の過程の課題を検討していきます（3.）。

1. 授業の種を見つける～遊びの中から

授業の種は、数学の本、教科書、雑誌などいろんなところにあります。ちょっとした遊びも授業の種になります。たとえば、次の問題はどうでしょうか。

(1) まずは、やってみてください。

テーブルの上に指を2本立てて、その間に三角定規を入れてください。2本の指から離れないように注意して、三角定規をくるくる回すことはできますか。指がぐらつくという人は、隣の人に手伝ってもらうとよいでしょう。三角定規をくるくる回すことができますね。 その時、2本の指を通る直線でテーブルの上が2つの領域に区切られており、三角定規の3つの頂点のうち、2つは同じ領域にあり、1つだけ別の領域にあると思います。その1つだけ別の領域にある方の頂点に注目してください。 三角定規をくるくる動かす時、それに伴ってこの1つの頂点も動いていきますが、この頂点はどのような線の上を動いていくでしょうか。 三角定規は2種類あり、三角定規の角度は、30度、45度、60度、90度といろんな場合があります。いろいろ試してみてください。どんなことがわかりますか。本当かどうかわからない、もしかしたら成り立つのかもといったことなど、何でもよいので、書きとめてください。

指がぐらぐらして頂点の描く線がよく分からないという人は、何か工夫をしてみてください。どんな工夫をしたらよいですか。

(2) どんなことが見つかったでしょうか？

以下では、2本の指を点A、Bとし、動きを調べている三角定規の頂点を点Xとすることにしたいと思います。動かしているのは三角定規なので、∠AXB＝30°、45°、60°、90°のいずれかです。たとえば、次のようなことが見つかったと思います（三角定規を2枚つなげたり、ＡＢ上に鏡を置いてみると、他にもいろんなことが見つかるでしょう）。

① 点Xの軌跡はどの場合も円になりそう。 ② ∠ＡＸＢ＝90°の時、円の中心は線分ＡＢの中点に来るようだ。 ③ 円の中心は辺ＡＢの垂直二等分線上に来るのでは？ ④ 三角形の頂角が小さいほど、円は大きくなりそうだ。

2. 授業への組み替え

ここで終わっても遊びとしては楽しめそうですが、通常の授業の中に入れるとしたら、いろんな準備が必要になると思います。どんな準備が必要でしょうか。

(1) どの単元で扱うか。

三角形を回す活動をどの学年のどの単元に入れるか、考える必要があります。現行のカリキュラムとの関連づけです。学習指導要領と検定教科書を見ます。教科書通りの進め方とは違ってくるので、同僚や管理職の方々に趣旨を理解してもらう必要がありますし、保護者の方が心配されないような配慮も必要でしょう。教科書通り進める授業をすれば、こ

れらの手間を省けるでしょうが、それで失われるものも少なくありません[1]。

今回の話題はいろんなところで扱えます。話題と直接関連しているという点では、中学校３年生の図形の領域で扱うのが良さそうです。学習指導要領の記述を見てみると、「内容の図形」の領域の一つとして、「観察、操作や実験などの活動を通して、円周角と中心角の関係を見いだして理解し、それを用いて考察することができるようにする。」という項目があります。「内容の取扱い」には、これと関連して「円周角の定理の逆を取り扱うものとする。」という注意書きもあります。手元の検定教科書も見てみると、学習指導要領には明示されなかった「円周角∠ＡＰＢに対する弧」などの用語や円周角の定理の証明が扱われていることもわかります。

(2) 種を授業に組み替える際の難所

まだ授業に持ち込むことはできません。種を授業の形に組みかえる必要があるからです。どんな問題を乗り越える必要があるでしょうか。それを克服する方法も考えてください。

1) 定理を証明する過程をどこに組み込むか。

三角定規を回す活動で得られた結果は、いずれも経験的に得られた（有望な）仮説であって、数学的に証明されたものではありません。(1) で確認した通り、どこかで円周角の定理の証明を扱う必要があります。

探索的な活動を取り入れた授業をした経験のある方はご存じと思いますが、実験や実測によって数学的な関係（に関する仮説）を見つける過程は、生徒も積極的で授業も楽しい雰囲気に包まれていながら、いざそこで得られた仮説を証明する段になると、授業の雰囲気が暗くなり、生徒が受動的に教師の説明を聞く授業になることがあります。命題を証明する過程でも、生徒がその証明の方法を見つける探索的活動を導入できないでしょうか。証明すべき仮説を探索する活動が終わったとたんに、その活動から切り離された文脈の中で生徒が教師の説明を聞くのではなく、生徒の探索的な活動を通して得た知見を生かしながら、証明の方法を見つけていく授業です。

2) 授業の段取りをどうするか？～円周角の定理と円周角の定理の逆の関係

1) で述べたとおり、三角定規を回す活動を通して得られるのは仮説です。しかもその仮説は、円周角の定理に関する仮説ではなく、円周角の定理の逆に関する仮説です。

それでは、円周角の定理を扱ってから、三角定規を回す活動を入れてはどうでしょうか。生徒の側に立って考えると気がつきますが、この授業展開には無理があります。生徒からすると、わざわざ三角定規を回す必然性がないからです。この展開の場合、三角定規を回す際に、生徒はすでに円周角の定理を知っているので、三角定規を回した時に頂点が円を描くことはすぐにわかってしまうのです。結果のわかっていることをわざわざやらせる「実験」は、理科の授業でもありますが、これはつまらないことだと思います。「授業だから仕方がない」といういいわけは他者としての子どもには通じません[2]。

となると、三角定規を回す活動は、円周角の定理の前に入れることになります。三角定規を回す活動を通して、円周角の定理の逆に関する有望な仮説が得られるとしても、その後の展開はどうしたら良いでしょうか。いわゆる授業の段取りといわれるものです（授業と言うよりは単元の段取りですが）。すべて扱うかどうかは別として、扱う可能性のある事柄としては、次の６つがあります。これらをどのような順番で扱うかという問題です。

・ 円周角の定理の逆に関する仮説を導く過程（三角定規を回す活動）
・ 円周角の定理の逆の証明
・ 円周角の定理に関する仮説を導く過程
・ 円周角の定理の証明
・ 円周角と中心角の関係に関する仮説を導く過程
・ 円周角と中心角の関係の証明

段取りができたら、次は個々の部分の詰めに入るといいたいところですが、授業作りのプロセスは、それほど直線的なものではありません。おおよその段取りを決めて細部の詰めに入った後、どうしても処理できない問題が見つかることがあるからです。その場合、再度段取りのレベルから見直す必要があります。ですから、段取りと細部とのどちらが先に確定するというものでもなく、全体と細部の決定は行ったり来たりのじぐざぐの作業となります。ここではそのプロセスを再現できないので、細部の詰めの難所とその対処に関しては、私の構想した授業の段取りとともに３．で検討したいと思います。

3）物的な環境のデザイン

上の 1）と 2）は頭の中で授業を構想して解決できる論理的な問題ですが、作業を授業に取りいれる場合、それだけではすみません。読者にお願いしたのは２本の指の間で三角定規を回す活動でしたが、これでは指がぐらついてちゃんとした結果が得られないからです。信頼性のある結果を得るためには、安定した実験装置が必要になります。これは理科の実験と変わりません。しかもあまり大がかりにならずに、安価であることが求められます。生徒全員が活動をするためには、実験装置もそれなりの数が必要になるからです。

三角定規がぐらつかない装置を作るのは、案外容易ではありません。私は試行錯誤の上、段ボール箱をたたんで作った台の上にピンを刺し、その間に三角定規を挟み込む方法を見つけました。通販でよく本を買う私は、段ボール紙がたくさんありましたし、ある程度の厚みがあれば、段ボール紙に刺したピンがぐらつかないことがわかったからです。

3. 私の授業作り

当日私は、どのように授業をしたのか。当日の授業展開は、(1) 問題の共有、(2) 三角定規を回しながら考えるグループ活動、(3) わかったことや問題点をクラスで共有する活動、(4) 証明する方法をクラス全体で探求する活動に分けられます。この順でそれぞれの段階の注意点や難所、および私の対処法について考えてみましょう。

(1) 問題の共有

1) 授業の入り～問題を生徒にとっての問題にすること

授業の入り方にはいろんな方法があります。以下の①のように、概念が厳密に定義され数学的に解決可能な問題を提示した後で、この問題を考えるために、三角定規や段ボール紙などの物的な環境を整えていく方法もあります。

> ① ２定点ＰＱと∠Ａを直角とする直角二等辺三角形△ＡＢＣがある。この時、辺ＡＢと辺ＡＣがそれぞれ２定点Ｐ、Ｑ上を通る状態を保ちながら、△ＡＢＣを動かすとき、頂点Ａはどのような軌跡を描くか。
>
> ② ここに２つの点があります。その間で三角定規をくるくる回すと、三角定規の頂点はどんな線を動くでしょうか。

しかし今回は②の形で問題を出しました。生徒と教師のやりとりを通して探求すべき謎を解決可能な問題に変えていく過程を経験したいと考えたからです。①が問題として完成されているのに対し、②は不十分です。したがって、それを解決可能な問題に組み替える過程で生徒が参加する余地があります。なお②には「三角定規をくるくる回す」とか、「三角定規の頂点」といった厳密でない表現もあるので、それは身振り手振りで伝えました。

2) 謎を実験可能な問題に組み替えること

②は参加者の関心を引く謎としては有効ですが、②だけでは、まだ問題を組織的に探求する条件が整っていません。生徒が探索的な活動を通して有意義な結果を得るためには、一定程度枠づけられた実験の方法が必要になります。今のままでは、生徒によって無用なばらつきが生じて、混乱するだけです。まず２点の間隔を決める必要があるでしょう。どの三角定規を使い、どの角の頂点の動きについて調べるのかについても、特定しておく必要があります。指示としては、次のようなものがあります。

> ③ ２つの定点がＡ、Ｂあります。２点間の距離は１０ｃｍとします。その間で三角定規をこのように（身振り手振りで）動かすと、三角定規の90°の角の頂点はどんな線を動くでしょうか。（その後、他の角度の場合も調べてくださいと指示。）

ここでの作業は、理科の実験のようなものです。２点間の距離をどのように決めるか、どの三角定規のどの角を調べるかという２つの条件は、いわば三角形を回した時にその頂点が動く軌跡は何かという謎を追求するための、実験の条件です。ここでは、２点間の距離を１０ｃｍにしていますが、２０ｃｍの方が良いかも知れませんし、５ｃｍの方が良いかも知れません。どのように条件を設定するかは、教師自身が実験をやってみて、授業の目的や生徒の状態などを考慮して決めれば良いことです。

ただし注意しなければならないのは、生徒が探索的活動をする際の活動の自由度をどの

ように設定するかという点です。③では2点間の距離がクラスで統一されており、三角定規の頂角については、90°の場合を先に実験した後、他の角度で調べるように、実験の順序が指示されています。もっと自由に作業してもらうこともできます。2点間の距離は各人で決めて良い、あるいはグループごとに決めて良いということにする手もあります。三角定規の頂角についても、どの角度からやっても構わないと指示しても良いのです[3]。

今回2点間の距離を統一したのは、2点間の距離が小さすぎると結果が見えにくくなり、大きすぎると作業に支障をきたすことがわかっていたからです。また、なぜ三角定規の90°の場合を最初にやってもらったかというと、以後の活動の困った時、生徒に90°の場合に立ち返ってほしいと考えていたからです。

もちろんこれらのことは、生徒の知るところではありません。だからこそ、③の条件を決める過程は慌てずに丁寧に行う必要があります。②の謎を提示した後、生徒の中に②の謎に取り組みたいという意識が高まってきて、そのための何か組織的な方法はないかと、生徒が探している時を見計らって、③の条件をやりとりの中で作っていくわけです。③を慌てて教師が出してしまうと、生徒はやらされていると感じることになり、いかにも授業という堅い雰囲気になります。

(2) 三角定規を回しながら考えるグループ活動

③の指示にしたがって、まず90°の場合を調べてもらいました。その後、45°や30°の場合を調べようとすると、配布したプラスチック製の三角定規は小さすぎて困ることがわかります。その様子を見て、参加者に工作用紙、はさみ、30ｃｍものさしを配り、紙でもっと大きな三角定規を作ってもらいました。これで作業が進みます。

1) 自分の体を通して物事を理解していくことの価値

作業が一段落したら、一連の作業でわかったことをグループ内で共有してもらいました。本当であるかわからなくても、気づいたことをできるだけ多くあげてもらうのが大切です。

すべてのグループから、点の軌跡は円になるかも知れないという声が上がっています。そこで私が、「本当に円かな？　円であることを確かめる方法はない？」と問うと、参加者は少し考えた後、「コンパス？」と答えます。「それでは、コンパスで試してみてください」と、各グループにコンパスを配って、確かめてもらいます。頂角が90°の場合は、点の軌跡がＡＢを直径とする半円であることがほぼ直観的に確かめられるので、コンパスの針を刺す場所はすぐに見つかります。円の作図は簡単であり、作図した点がほぼその円周上に乗っているのを確かめることも簡単です。「本当だ」とか、「すごい」といった声が上がります。

参加者は数学の現職教員や教員を目指す学生がほとんどだったので、実はこの時点で、三角定規の頂点の軌跡が円になることは、頭ではわかっていたはずです。しかし、頭ではわかっている（つもりである）ことでも、実際に自分の体を動かしてわかると、驚いてしまうのです。実際に作ってみたり、書いてみたりすることは、私たちが想像するよりも遙

かに深い意味を持っているといえそうです。

2）ツールによって開かれる学びの可能性

頂角が90°の場合とは異なり、頂角が90°以外の場合は、円の中心、つまりコンパスの針を刺す位置は、直ちにはわかりません。作図した１点Ｐを選んで、⊿ＡＰＢの外心をコンパスで作図しようとする人も現れますが、少々面倒です。外心の作図が単元の目標において不可欠である場合は別ですが、今回はそうではなく、むしろ余り知恵を働かせることなく、作図した点が円周上に乗っていることを確かめてもらいたいと考えていました。

そこで私は、円の中心が見つからずに困っているグループを見つけては、丸型グラフを配っていきました。丸形グラフとは、グラフ用紙の１点を中心とする同心円が書いてあるグラフです。これを三角定規の頂点をプロットしたグラフに重ね合わせていくと、どこかで、作図した頂点が同心円の一つの上に乗っかる場所を見つけることができます。そのときの同心円の中心が、三角定規の頂点の軌跡をなす円の中心ということになります。しかも同時に、三角定規の頂点の軌跡が円をなすことも確認されます。2 枚のグラフ用紙をすかしながら、点が一つの円周上に乗るように持っていくのは、遊びのようでもあり、ちょっと楽しいものです。今回の授業で一番盛り上がったのはここでした。

丸形グラフはあくまで物事を確かめるためのツールですが、そのツールが数学的な関係の発見を容易にしています。

3）アイディアの誘い出し

三角定規の頂点の軌跡が円になることはすべてのグループが見つけますが、ここで探求が終わってしまうこともあります。通常の中学校の教室の場合、むしろその方が多いかも知れません。そのような時は、教師が前に出て、生徒に考えてもらいたいことを確認する必要が出てきます。アイディアの誘い出しと私が言っているものです。

ここでの教師の出（教師が主導して自然な授業展開を修正すること）は、いわば、自然な授業展開に対して教師が力を加えることですから、丁寧に進める必要があります。私は、円に関して生徒が持っていると思われる知識を使いました。次のように語ったと思います。

> 皆、三角定規の頂点は円周上を動くと予想したようだね。その円の位置は何で決まるかというと、中心と半径だった。中心と半径さえわかれば、円が決まるのだったね。
>
> それでは、今まで円を描いてきたと思いますが、円の中心や半径について何かわかることはないですか。中心はどこにありますか。円の半径は三角形の頂角と何か関係がありますか。

この働きかけを通して、円の中心が常に線分ＡＢの垂直二等分線上にあることや、頂角が小さくなればなるほど、円の半径が大きくなることなど、いろんな関係を生徒たちは見つけることができます。

(3) わかったことや問題点をクラスで共有する活動

1) わかったことを共有しながら探求の種を見つける

次に、わかったことをクラスで共有しつつ、そこから次の探求の種を見つけていきます。発表されたことは、1. であげたことでした。再掲します。①点Xの軌跡はどの場合も円になりそう。②∠AXB＝90° の時、円の中心は線分ABの中点に来るようだ③円の中心は辺ABの垂直二等分線上に来るのでは？　④三角形の頂角が小さいほど、円は大きくなりそうだ。⑤∠APB＝xの時の円の中心は、∠APB＝2xの円周上に乗っているような気がする。以上です。

このうち、①から④までは、(多少教師の働きかけがあれば) 参加者がグループ作業をしている間に自然に見つけ出すのに対し、⑤は見つけられないグループも出てきます。すべてのグループが①～⑤のすべてを見つけてから、アイディアの発表に移っても良いですが、そうしなければならないわけでもありません。どこかのグループが⑤のアイディア (の断片) を発表した際に、教師がその後を引き取って、「ちょっと、皆、頂角が 45° の場合の円を見てみて。その円の中心はどこにある？」などと問いかけることで、⑤は (発見的に) クラスの共有財産になります。

2) 証明された真理と経験的な事実の区別～証明の必然性を作る

三角定規の頂点の軌跡が円をなすという目前の事実は、経験的な事実であって、証明された真理 (真であるとみなされた命題から演繹された命題) ではありません。しかし参加者がこのことに気づいているとは限りません。中学校の図形の領域は、数学的な証明が初めて導入される領域ですから、経験された事実と証明された真理との違いを確認しておく必要があります。当日は、次の2点を述べて確認しました。

- 三角定規の頂点の軌跡が円になりそうだということは、90° などの4つの場合について確認されただけで、他の場合も同じように円になるどうかはわからない。
- どんな場合でも点の軌跡が円になるということを言うためには、どんなにいろんな形の三角形を作って実験してもだめであり、一般的な証明が必要になる。

これらは、①の証明を行う生徒にとっての必然性を作る働きかけです。当日は、これで何とか押し切りましたが、改めて振り返ってみると、90° などの場合しか調べていないから、まだ証明されたとは言えないという主張は生徒に受け入れられるとしても、だから証明をやろうという話に行くのは、生徒にとって必然性のある展開とは言えません。「証明されていないから、証明しなければならない (あるいは証明しよう)」という展開になるためには、「証明されていないことは (数学的な) 真理とは言えない (だから価値がない) のだ」という、強い主張が必要だからです。

これはほとんど真理とは何か、知識とは何かという難問です。これに関しては、私はまだ十分な答えを用意していません。あることの正しさを実物で示すのではなく、言葉で示すことの意義が感じられるような経験が幼い頃からじょじょに組織される必要がありそうです。

(4) 証明の方法をクラス全体で探求する活動

1) 難所の限定

証明すべき命題を見つけるところまでは楽しいものですが、その後は何かしら教師主導の力業が必要になります。証明を見つける過程をもっと自然な授業展開で進めるためには、おそらく初等中等学校のカリキュラム全体を見直す必要があると思われます。ここでは、現行のカリキュラムの中にこの単元を入れることを想定して、段取りを組んでみました。

① 三角定規の頂点の軌跡が円になること（円周角の定理の逆）をどのように証明するかと問題提起をする。しかし、円周角の定理の逆を直接証明することは容易ではない。そこで、その逆、つまり円周角の定理を証明することは可能かと問う。（定理の証明をする代わりに、定理の逆を証明する。）

② 円周角の定理の一般的な証明の方法を見つけるために、まず円周角が90°の場合について調べてみる。（特殊化）

③ 実際に三角形を作図し、いろんな角度を測ってみる。角度の間に何か関係は見つからないかと問う。実験を通して、証明すべき命題を見つける。

④ 成り立ちそうな関係を見つけて、その証明方法を考える。それほど難しくない。円周上の2点と円の中心を結んでできる三角形が二等辺三角形であることに気がつく。これから、円周角が90°の場合の円周角の定理の証明方法を見つける。

⑤ 円周角が90°の場合の円周角の定理の証明方法を一般化して、一般的な円周角の定理を証明する。

⑥ 円周角の定理が成り立つことを使って、円周角の定理の逆を証明する。（逆の証明）

難所は①と②です。このうち②は一般的な定理の証明方法を探すために、その定理を特殊な定理に作りかえて、その特殊な定理を証明するものです。定理を特殊化したり一般化したりしながら定理の証明方法を探すことは、数学ではよくやる普遍的な知恵です。漸化式で作られる数列の一般項を予想するために、その漸化式に具体的な数を代入してみるのも同じ知恵です。この単元で初めて特殊化と一般化の方法を持ち出せば無理な印象を与えるかも知れませんが、初等中等学校のカリキュラム全体を見通しておけば問題ないでしょう。

それに対し、おそらく中学校の図形の領域を除けば経験しないと思われる、最大の難所であり文化的にも重要な点は、ある定理を証明するためにその定理の逆を証明しようとする①です。ある定理が真であったとしても、その定理の逆も真であるとは限りません。しかし、ある定理（A⇒B）が真であれば、それにある条件（C）が加わりさえすれば、その定理の逆（（BかつC）⇒A）も真になります。その「ある条件（C）」を探すことができれば、逆の証明ができるわけです。古代ギリシャにおいて、「解析」とは結論を正しいと仮定して前提を導く、証明の発見法のことでした。「解析」の知恵を教えることは、今回の単元の大きな目標といって良いと思います。

私は、常に生徒にとっての必然性を意識しながら、授業展開をデザインする必要がある

と述べていますが、それだけでは乗り越えられない壁もあります。数千年前から今日に至るいろんな時代に、それぞれ特殊な文化的状況の中で生まれた数学を、現代の子どもたちが学ぶわけですから、文化的な距離があって当然でしょう[4]。

2）証明の方法を探す

それでも、文化的な距離を意識させられる難所続きでは生徒も大変ですし、教師主導の授業展開が続けば、生徒も自分が授業展開に関わっているという意識を持ちにくくなります。教師としては、自分が出て行かざるを得ない難所をできるだけ限定して、それ以外の場面で生徒のアイディアを活かした自然な授業展開をすることが大切だと思います。実際難所の①と②以外は、それなりに対処の仕方があります。ここでは③～⑤についてお話しします。

③と④は、円周角が90°の場合の円周角の定理を証明する方法を見つける過程です。今、ＡＢを直径とする円Ｏを考え、円周上の点Ｘを考えたとき、∠ＡＸＢ＝90°であること（円周角の定理の特殊な場合）の証明方法を探してみましょう。

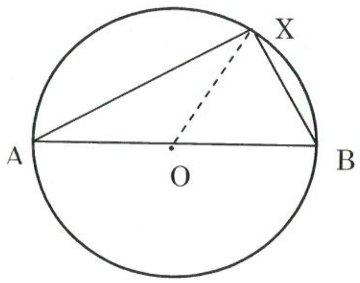

図１

まず③です。ここでは右の図１を書いて、∠Ａや∠Ｂ、∠Ｘを分度器で測ってもらうのですが、円では中心が大事なので、そのことを確認した上で、ＯとＸの間にも線を引かせます。すると、∠ＡＸＯ、∠ＢＸＯも測定の対象になります。実測するとわかりますが、丁寧に図を書けば、∠Ａと∠ＡＸＯがほとんど同じになり、∠ＸＯＢがほぼ∠Ａの２倍になることが確認されます。しかしこれらはまだ証明されたわけではないので、これらの証明が課題として浮上します。

その証明が④です。∠Ａ＝∠ＡＸＯについては、⊿ＯＡＸに注目させることでほぼ解決します。⊿ＯＡＸがＯＡ＝ＯＸの二等辺三角形であることがすぐにわかるからです。生徒がこれに気づかないようであれば、図中の三角形の辺の長さも測っておけばよいでしょう。そして、∠Ａ＝∠ＡＸＯがわかれば、∠ＸＯＢは⊿ＯＡＸの外角なので内対角である２∠Ａに等しいことが確認されます。以後の手順は省略します。最終的な目標が∠Ｘ＝90°であることを常に生徒に意識させること、および次の⑤で使う性質をここで丁寧に取り上げておくことの２つが大事です。

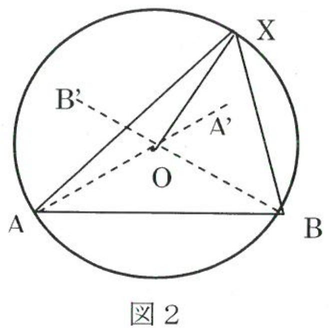

図２

次は⑤です。円周角が90°の場合の円周角の定理は③④で証明できました。これを使って証明するので、記号と図の配置はできるだけ前と変わらないようにします。すると、⊿ＯＡＸが今度も二等辺三角形になるので、∠ＸＡＯ＝∠ＡＸＯが言えます。次に∠ＸＯＢ＝２∠Ａにあたるものを考えてもらいますが、その際④の証明で⊿ＯＡＸの外角＝内対角の和を使った

ことを思い出せば、今度もそれを使ってみようという発想が生まれます。そこで、ＡＯをＯから延長すれば、⊿ＯＡＸの外角∠ＸＯＡ'＝2∠ＡＸＯがわかります。そして最後に、∠Ａ'ＯＢ'＝∠ＡＯＢを使えば、鋭角の場合の円周角の定理が証明できます。この証明方法は、よく教科書に見られる証明の方法に比べ、やや回り道をしていますが、教科書は回り道をしていない（＝洗練されている）分、生徒が自然に思いつくものからはかけ離れています。どちらが良いかは、生徒の状態を見て決めることだと思います。以上の手順で、論証のかなりの部分は生徒とのやりとりの中で展開できると考えています。

おわりに

結論は案外簡単です。子どものじぐざぐとした学びにつきあうために、教師もまたじぐざぐとした歩みを必要とするということです。そのことが、授業を子どもとの出会いの場に戻す近道だと私は考えています。

註

[1] 創造的な授業者という教師のアイデンティティが失われて、教師としての存在意義が危機にさらされますし、生徒の自由な探求活動の余地を狭めて、生徒にとって数学を学ぶ意義が失われます。かといって、私は教科書に沿って進む授業そのものを否定するつもりはありません。教科書に沿った授業といってもその質はさまざまですし、それ以上に、目の前の生徒によっては教科書に沿った授業が望ましい場合があるからです。

[2] 実際には、「授業だから仕方がない」と言いたくなるような「無理な」授業展開でも、問題なく進む場合があるでしょう。ただし、それは、教師につきあってくれる生徒の存在に支えられています。その生徒は、今見通しが悪くともその後きっと有意義な結果に至るのだろうという見通しがあって授業に参加してくれたり、あるいは授業以外の場で作られた教師との信頼関係に支えられてその場にいてくれるわけです。近代学校に対する信頼が揺るがなかった時代は、そのような生徒が多数を占め、結果として、無理な授業展開であってもそのことが露見しなかったのだと私は考えています。

[3] 一般に、生徒が探索する際の制約を弱めると、教師の思ってもみなかった関係を生徒が見つけることがあります。三角定規を組み合わせていろんな角度を作るアイディアや、鏡を使って考えるアイディアは、2 定点間の距離以外の条件を自由にして作業してもらった際に出たアイディアです。

[4] その文化的距離を安易に無化することは、数学が歴史的な存在であることを脱色して、歴史を現代に奉仕させることになります。その例が戦時期あります。拙著『近代日本の数学教育』（東京大学出版会、2006 年）の第 10 章を参照。その他の佐藤の研究に関しては、 http://www.kisc.meiji.ac.jp/~eijisato/main/ をご覧ください。