高校数学の導入問題を作ろう！

佐藤　英二（明治大学）

はじめに

中学校の数学教科書には、どの単元にも導入問題があります。その単元で扱う定理を実験的に見つけるような探索的活動を含む問題です。導入問題は、1920年来の教育改革の中で、 新しい単元を学ぶ意義を生徒に感じてもらうために教師たちが開発したものです。その教育改革は次第に上の学年に及び、1940 年代の旧制中学校　4 年生の教科書には、積分の単元にも導入問題が入りました[1]。今日、高校の教科書に導入問題らしきものはありませんが、それは、高校では単元の導入に工夫する必要がないということではなく、戦後の混乱期に戦前の教育の知恵が失われた結果なのです。そこで、高校の導入問題を現職の先生方と共同開発できないかと思い立ち、分科会を組織したという次第です。今回導入問題の素案を作ったのは、数学Ｉの 2 次関数と三角比、数学Ⅱの複素数（「いろいろな式」）と対数関数の 4 つです。全体を統括する趣旨というほど大げさなものはないのですが、あえて挙げれば以下の 4 点となります。

① 関数グラフや電卓を使うことで、時間と手間をかけずに探究的な活動を入れたい。切ったり貼ったりという実物を操作する活動は他に代えがたい迫真性があるものの、どうしても時間がかかり、授業への導入に二の足を踏む人が多いと思います。その点で、生徒に端末が行き渡っている現在、関数グラフや電卓の利用は非常にハードルが低くなっています。

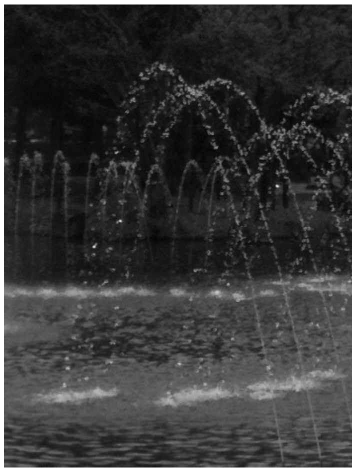
② 数学的な関係を見つけたり、それまでの活動で分かったことをまとめたりする活動の中に共同作業を入れたい。一人ひとり黙々と問題を解く学び方が悪いわけではありませんが、そのような姿勢で数学に向うことが難しい生徒が多いことを考えると、まずは学ぶことが周りとの関係づくりにつながるような活動を考えたいと思っています。

③ ①②の両者を通して、数学の正しさと数学を学ぶ意義に関する感覚が生徒の中に育つことを目指します。他者から与えられた解き方を素早く使える人が「数学ができる」と認識されがちな状況を変え、考えることそのものが面白いと思える授業を提案したいと思っています。

当日は、現職経験者 9 名、学生・院生さん 7 名が参加してくれました。GeoGebra を用いて「2 次関数」で扱う定理を見つけるプランをグループで議論してもらったところ、予想以上に盛り上がり時間切れとなりました。以下では、比較的まとまっている 2 次関数と三角比のプランを紹介します。2 次関数のプランは、生徒の活動の幅が広い、よりシンプルなプランに変えました。

1.「噴水の形って何だろう？」(2 次関数)～探索のツールとしての GeoGebra

GeoGebra で生徒に自由な活動をしてもらう中で、2 次関数のグラフに関する性質を見つけてもらおうという趣旨です（今回は、式を入力するとグラフを書いてくれる機能だけを使っています。豊富な機能を活かせばもっといろいろな探究活動ができるでしょうが、「低」機能版でも十分使えることを示したかったという思いがあります)。授業はおおよそ以下の通り考えています。単元の導入場面です。



① 次の図を見せて、「この噴水の形は何かな？」と、尋ねます（さしあたり一番手前に見える噴水を考えます)。中学生の時に y=kx^2 のグラフを習っているので、「放物線」という答えが期待できます。そこで、この噴水が本当に放物線かどうか確かめましょうと問題提起します。この画像をコピーして GeoGebra 上でペーストすると、座標平面上に写真が乗ります。画像の長方形の左下の頂点を原点に合わせます。
　GeoGebra 上で y=kx^2 のグラフを書いても、噴水と重ね合わせることはできません。この噴水が本当に放物線かどうかを調べるには、「頂点が原点にない放物線がどんな式で表されるのかを考える必要があるので、今回はそれをやりましょう」と宣言します。

② まず、a をいろいろ変えて y=x^2+ax のグラフを書き、気づいたことグループで共有してもらいます。a をどんな値にしても形は y=x^2 と変らないことや、グラフが常に原点を通ることがわかります。さらに、放物線の軸に注目すると、a の値によって軸が移動することがわかります。頂点の x 座標（軸）と a の関係を調べれば、軸 x＝-a/2 がわかります。x 軸との交点が（0，0）と（0，-a）なので放物線の対称性からもわかります（生徒に説明してもらいましょう)。

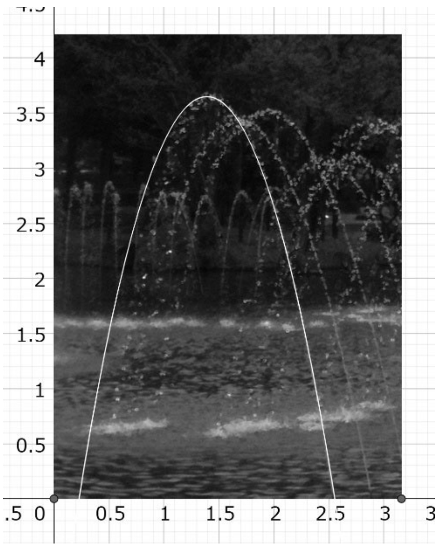
③ 次に、a を固定して b を変えた時に，y=x^2+ax+b のグラフがどうなるか、調べてもらいます。b を変えると、グラフが y 軸方向に平行移動することや、y 切片が常に b であることがわかります。ただし、y=x^2+ax+b のグラフの頂点の y 座標はすぐにはわからないので、y=x^2+ax+b のグラフの頂点の位置を求めようと宣言します（課題の設定)。a と b の値がわかった時に、y=x^2+ax+b のグラフの頂点の座標を求めることが課題★となります。

④ しかし上の課題★に直接取り組むのは難しいので、逆に y=x^2+ax+b グラフの頂点の y 座標がわかっている場合に、a と b の値がどのような関係にあるかを考えようと述べて、課題を再設定します[2]。GeoGebra 上で a と b の数値を調整することで、頂点の y 座標が 0 になる、つまり y=x^2+ax+b グラフが x 軸に接するような式を作ってみるよう

促します。その結果、どの式も（$x+\triangle$）^{2}　の形で因数分解できることがわかります。

⑤　$y=x^2+4x+9$　のグラフの頂点がどこにあるか、考えてみます。$y=x^2+4x+9$ という式から、このグラフについてどのようなことがわかるか、グループで考えてもらいます。GeoGebra でグラフを書けば頂点の位置はすぐにわかってしまうのですが、GeoGebra がいつも使えるとは限らないので、GeoGebra を使わずに、式の特徴から頂点の位置を見つける方法を考えてくださいと促します[3]。まず、これまで得た知識から頂点の x 座標が(-2)であることがわかります。さらに、$y=x^2+4x+b$ の式でグラフが x 軸に接するのは、b=4 の場合であることもわかります。$y=x^2+4x+9 =x^2+4x+4+5$　だから、$y=x^2+4x+9$ のグラフは、K を y 軸の正の方向に+5 だけ平行移動したグラフであることがわかります。つまり頂点の位置は（-2，5）とわかります。

⑥　噴水の問題に戻ります。まず頂点の座標をグラフから読み取ってもらうと、おおよそ（1.5，3.5）くらいであることがわかるので、$y=(x-1.5)^2+3.5$ のグラフを作図します。頂点の位置を微調整し、x^2 の係数をうまく調整すれば、噴水の絵と重ねることができることがわかります（右図）。



このように放物線を実際の噴水に重ねてみると、噴水の飛び上がっている部分（図の右側）は放物線に沿っているのに対し、落ちている側（左側）はその放物線から少しずれていることがわかります。ですから、細かいことを言うと、噴水の形は上がっていく時だけ放物線であって、落ちていくときは少しずれるというのが結論になります。落ちていくときは水滴が合体したりして、空気抵抗が無視できなくなるようです。

上の活動の⑤の操作が頂点の座標を求める手順になります。つまり、GeoGebra を用いて $y=x^2+ax+b$ のグラフをいろいろ書いてみる中で、頂点の x 座標が$-a/2$ であることがわかり、次に軸が共通で x 軸に接する放物線（で、x^2 の係数が 1）の式が $y=(x+a/2)^2$ だと分かるので、定数項の差を取れば頂点の座標がわかるというストーリーです。上の授業のプランで少し工夫したのは２か所の下線部です（注参照）。問題の再設定等，少々面倒な作業が入るので，話題の共有という介入を適宜入れることも大事です。

以上は、GeoGebra で 2 次関数のグラフの性質を見つける一案です。他にも、$y=x^2+ax+b$ と $y=ax+b$ のグラフが y 軸上の点で接することを見つけてもらうなど、いろいろな使い方ができそうです。

2.「何を表す関数かな？」（三角比）

中等教育機関の数学では関数を学ぶことが大事だとこの 100 年くらい言われ続けているにもかかわらず，新たに学ぶ関数の意味を探る授業が開発されていないのはなぜでしょうか。定義から入るのではなく，行為から入る関数の学び方もあると思います。このような趣旨で三角比を扱います。今回は，Windows のアクセサリーに入っている関数電卓を使います。角度は度（DEG）にします。

① 「みなさん、コサインやサイン、タンジェントって聞いたことあります？」くらいのノリで始めます。まず、30→「三角関数」→cos の順で押すと、cos30° の値が出ることを確認します。ただし、「cos30° が何を意味するのか、わかりません。今日の授業では、cos30° や sin30° 、tan30° が何を意味するのか、見つけてもらいたいと思います」と語って、授業を始めます。

② 適当な角度を決めて下の表を作ります（θは一例です)。0° と 90° は含むとして、後はその間の角を各自で取ってもらいます。

θ（°）	0	18	45	68	80	90
cosθ						
sinθ						
tanθ						

③ 10cm を 1 として､グラフ用紙の上に点 P(cosθ,sinθ)の点を取っていきます(GeoGebra を使ってもよい)。θの値を点 P の隣に書いてもらいます。

④ 点はどのような線の上に並ぶか考えてもらいます。すぐに原点を中心とする半径 1 の円周（単位円）であることがわかります。

⑤ 角度θを用いると点 P はどのような点であると言ってよいか、グループで考えてもらいます。点 P は、x 軸の正の向きとθの角度をなす直線と単位円の交点（あるいは、点（1，0）を原点の周りにθだけ回転した点）という答えが期待されます。

⑥ cosθと sinθは、角度θを用いるとどのような値であると言ってよいか。これもグループで考えてもらいます。cosθと sinθは、それぞれ x 軸とθの角度をなす直線と単位円の交点の x 座標と y 座標であることがわかります。

⑦ tanθは何を表すか考えてもらいます。答えが出てこないようであれば、原点と点 P を直線で結んでもらい、0 度の時は 0 であり、90 度に近づくにつれていくらでも大きくなりそうだということを確認してもらいます。tanθが直線 OP の傾きや直線 OP と直線 x=1 の交点の y 座標を見つけてもらいます。最終的に tanθ= sinθ/cosθであることを見つけてもらいます。ここまでで得られた sinθ、cosθ、tanθの性質を承認し、実はそのように決めたものなんですと種明かしをします。

⑧ ここから考察に入ります。「cosθと sinθは、どんな値でも取れるのかな」と問えば、-1 以上 1 以下という答えが返ってくると思います（理由も聞いてみます)。「cosθも

sin θ も 0.5 ということはあるかな」と問えば、(0.5, 0.5) は単位円上にないから、cos θ =0.5 かつ sin θ =0.5 ということはないということがわかります。「それでは、cos θ =0.5 のとき、点 P はどこにくるか。その時、sin θ の値はどうなるか」と問うことで、最終的に $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ という性質を見つけてもらいます。次に、角度を鈍角に拡張します。(cos100°, sin100°)の点を単位円上に取ってもらい、その座標を求めてもらいます。そこでの求め方から cos100° = -cos80° などの性質を見つけてもらいます。さらに、有名角の三角比について考えてもらいます。「cos60° は 0.5 というきっちりした値だが、これは偶然かな？」と問えば、中学校で教わった有名な直角三角形の辺の比とつなげる意見が引き出せます。

⑨ 最後に、A を原点に置き、B を x 軸上に取った直角三角形⊿ABC を考えます。斜辺 (AC) が 1 になるように、三角形を縮小すると他の 2 辺は AB/AC、BC/AC となります。これが cosA、sinA だから、cosA=AB/AC、sinA=BC/AC であることがわかります。

現状のカリキュラムでは、単元名は「三角比」であって三角関数ではありません。これは、三角比として長らく扱われていたものが、後に超越関数として意味づけられ、高等教育の最初の科目に入ったという数学史の事情によります。しかし、三角比を新たに学ぶ生徒にとって、三角比と三角関数の違いに意味があるとは思えません。難しくなりすぎないように注意しさえすれば、数学 I の「三角比」に関数的な扱いを入れることは可能だと思います。ちなみに、単位円から三角比の定義に入る入り方は、鈍角や一般角への拡張やラジアンの導入、サインカーブの導入など、いろいろな点でメリットがあります。

註

[1] 拙稿「教師教育における数学教育史研究の意義と可能性―10 の思い込みから解放されるために―」『数学教育史研究』25、2025

[2] 課題の再設定は、生徒に自由な探求をしてもらう際に適宜教師が行う必要がある介入の一つです。

[3] GeoGebra 等の幾何学作図ソフトも数学的活動に必要な環境の一つと考えれば、「GeoGebra を使わずに」という条件は不要かもしれませんが、式を読む能力を育てようと思えば、ツールの助けを一旦外した方が良い場合があると思われます。