入学前教育課題採点表

各自で解答をもとに採点を行い、次の表に採点結果をメモしてください。
その後、下部に記載の回答フォームから採点結果を報告してください。
解答用紙は入学手続書類とともに提出してください。

設問	満点	得点
I　　三角比・図形の計量	18 点	点
II　　三角関数	20 点	点
III　指数関数・対数関数	31 点	点
IV　直線と円	10 点	点
V　　複素数平面	21 点	点
VI　平面上のベクトル	25 点	点
VII　空間座標とベクトル	22 点	点
VIII　導関数	12 点	点
IX　　不定積分	19 点	点
X　　極限	22 点	点
XI　　微分	42 点	点
XII　積分	58 点	点

自己採点結果報告フォーム

次の URL または二次元コードを用いて報告フォームにアクセスし、回答してください。

URL　https://forms.office.com/r/K4QzWbAfez

二次元コード

入学前教育課題 No. 1 （解答と配点）

赤い数字は、配点です

I. 三角比・図形の計量 (合計 18 点)

1. (三角比の相互関係の利用)

   $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{5}{9}$ である。$90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき、$\cos\theta \leqq 0$ より $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ である。$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より $\tan\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

   答. $\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ (2 点), $\tan\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ (2 点)

2. (正弦定理を利用)

   $\mathrm{C} = 180^\circ - (105^\circ + 45^\circ) = 30^\circ$ である。正弦定理より $\dfrac{b}{\sin 45^\circ} = \dfrac{4}{\sin 30^\circ}$ であるので、$b = \dfrac{4}{\frac{1}{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ となる。また $\dfrac{4}{\sin 30^\circ} = 2R$ より $R = 4$

   答. $b = 4\sqrt{2}$ (2 点), $R = 4$ (2 点)

3. (余弦定理・ヘロンの公式の利用)

   $\cos\mathrm{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{7^2 + 15^2 - 13^2}{2 \cdot 7 \cdot 15} = \dfrac{1}{2}$ であるので $\mathrm{A} = 60^\circ$ となる。$S = \dfrac{a+b+c}{2}$ とすると △ABC の面積は $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ より、$S = \sqrt{\dfrac{35}{2} \cdot \dfrac{9}{2} \cdot \dfrac{21}{2} \cdot \dfrac{5}{2}} = \dfrac{105\sqrt{3}}{4}$

   答. $\mathrm{A} = 60^\circ$ (2 点), 面積 $\dfrac{105\sqrt{3}}{4}$ (2 点)

4. (1) △ABC で余弦定理により $\mathrm{AC}^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3\cos 60^\circ = 7$ となる。$\mathrm{AC} > 0$ より $\mathrm{AC} = \sqrt{7}$

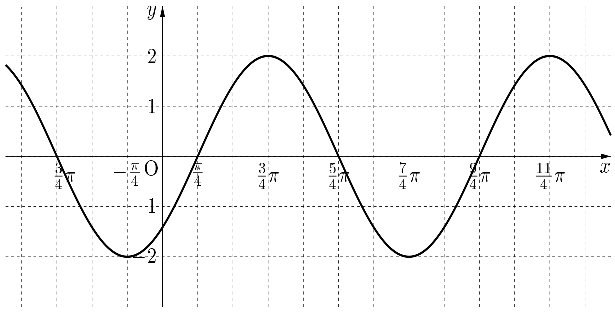
   (2) $\mathrm{D} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ である (円に内接するので、対角の和は 180°)。△ACD で余弦定理により、$(\sqrt{7})^2 = 1^2 + \mathrm{AD}^2 - 2 \cdot 1 \cdot \mathrm{AD} \cdot \cos 120^\circ$ となる。よって $\mathrm{AD}^2 + \mathrm{AD} - 6 = 0$ より、$(\mathrm{AD}+3)(\mathrm{AD}-2) = 0$ となり、$\mathrm{AD} > 0$ より $\mathrm{AD} = 2$

   (3) 求める面積は $\triangle\mathrm{ABC} + \triangle\mathrm{ACD} = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ + \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \sin 120^\circ = 3 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

   答. (1) $\sqrt{7}$ (2 点), (2) 2 (2 点), (3) $2\sqrt{3}$ (2 点)

II. 三角関数 (合計 20 点)

1. (5 点)



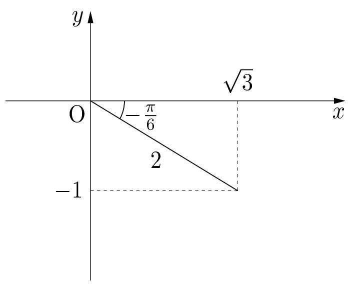
2. (加法定理)

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ より $\cos^2\alpha=1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}$ であり、α は第 1 象限にあるので $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$ である。同様に $\cos^2\beta=1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2=\dfrac{144}{169}$ であり、β は第 2 象限にあるので $\cos\beta<0$ より $\cos\beta=-\dfrac{12}{13}$ である。よって、$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{3}{5}\times\left(-\dfrac{12}{13}\right)+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{5}{13}=-\dfrac{16}{65}$

答. $-\dfrac{16}{65}$ (5 点)

3. (加法定理と三角関数の合成)

$a=\sqrt{3}, b=-1$ より $r=\sqrt{a^2+b^2}=2$ である。$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\alpha=-\dfrac{1}{2}$ より $\alpha=-\dfrac{\pi}{6}$



答. $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$ (5 点)

4. $2\cos^2\theta+\sin\theta-1=2(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-1=-2\sin^2\theta+\sin\theta+1$ であるので、与えられた方程式は $2\sin^2\theta-\sin\theta-1=0$ と表せる。ゆえに $(\sin\theta-1)(2\sin\theta+1)=0$ となる。$0\leqq\theta<2\pi$ であるから、$\sin\theta=1$ なら $\theta=\dfrac{\pi}{2}$、$\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$ なら $\theta=\dfrac{7}{6}\pi, \dfrac{11}{6}\pi$ である。

答. $\theta=\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{7}{6}\pi, \dfrac{11}{6}\pi$ (5 点)

III. 指数関数・対数関数 (合計 31 点)

1. (指数関数・対数関数の性質の利用)

(1) $\sqrt[3]{\sqrt{5^{12}}}=\sqrt[3\times2]{5^{12}}=5^{\frac{12}{6}}=5^2=25$

答. 25 (3 点)

(2) $\sqrt{3} \times \sqrt[6]{3} \div \sqrt[3]{9} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{6}} \div 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{2}{3}} = 3^0 = 1$

答. 1 (3 点)

(3) $\log_5 \sqrt{2} = \log_5 2^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log_5 2$

答. $\dfrac{1}{2}\log_5 2$ (3 点)

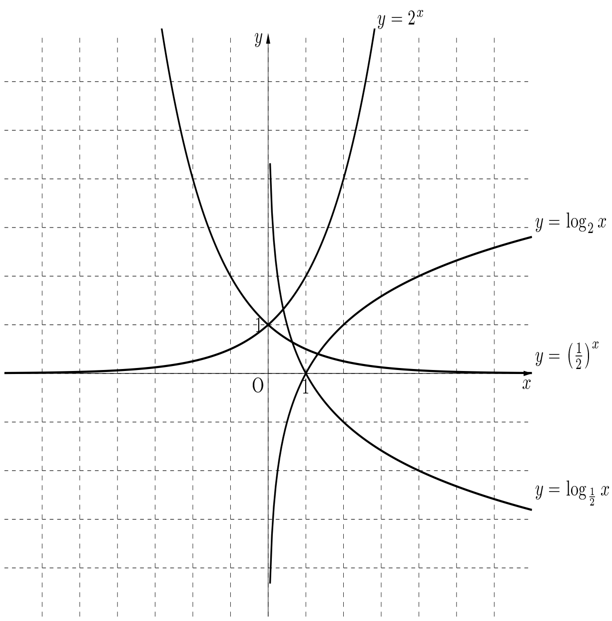
(4) $\log_{10} 8 + \log_{10} 400 - 5\log_{10} 2 = \log_{10} \dfrac{8 \times 400}{2^5} = \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2\log_{10} 10 = 2$

答. 2 (3 点)

(5) $\log_3 18 - \log_9 4 = \log_3 18 - \dfrac{\log_3 4}{\log_3 9} = \log_3 18 - \dfrac{2\log_3 2}{2\log_3 3} = \log_3 18 - \log_3 2 = \log_3 \dfrac{18}{2} =$
$\log_3 9 = 2$

答. 2 (3 点)

2. 8 点 (4 つの関数のグラフは各 2 点)



(ア) 実数全体 (1 点)

(イ) 正の実数全体 (1 点)

(ウ) $(0, 1)$ (1 点)

(エ) $(1, 0)$ (1 点)

(オ) x 軸 (1 点)

(カ) y 軸 (1 点)

(キ) 増加 (1 点)

(ク) 減少 (1 点)

IV. 直線と円 (合計 10 点)

1. 接点を $Q(x, y)$ とする。点 Q における接線の方程式を $x_1x + y_1y = 25 \cdots (1)$ とする。(1) が点 $P(-5, 10)$ を通るから、$-5x_1 + 10y_1 = 25$ である。$x_1 = 2y_1 - 5 \cdots (2)$ とおく。また, 接点 Q は円周上の点でもあるから $x_1^2 + y_1^2 = 25 \cdots (3)$ である。(2) を (3) に代入する。$(2y_1 - 5)^2 + y_1^2 = 25,\ 5y_1^2 - 20y_1 = 0,\ y_1(y_1 - 4) = 0$ より、$y_1 = 0, 4$ である。$y_1 = 0$ のとき $x_1 = -5$、$y_1 = 4$ のとき $x_1 = 3$、を (1) に代入すると、$x = -5,\ 3x + 4y = 25$

   答. $x = -5,\ 3x + 4y = 25$ (5 点)

2. (原点 O と直線 $ax + by + c = 0$ との距離 $d = \frac{|c|}{a^2+b^2}$ を利用)

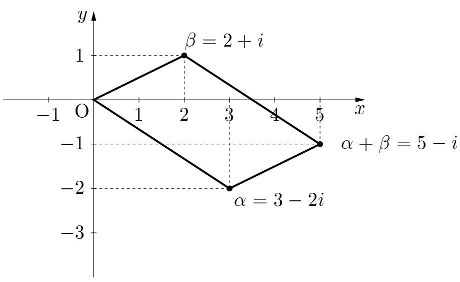
   円と直線の交点を A, B とし, 線分 AB の中点を M とする。線分 OM の長さは、$\mathrm{OM} = \dfrac{|2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$ である。$\mathrm{OA} = \sqrt{5}$ であるから、$\mathrm{AB} = 2\mathrm{AM} = 2\sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{OM}^2} = 2\sqrt{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3}$

   答. $2\sqrt{3}$ (5 点)

V. 複素数平面 (合計 21 点)

1. (1) $\alpha + \beta = (3 - 2i) + (2 + i) = (3 + 2) + (-2 + 1)i = 5 - i$

   答. $5 - i$ (3 点), 図 (3 点)



   (2) $|\alpha - \beta| = \sqrt{(3 - 2)^2 + (-2 - 1)^2} = \sqrt{10}$

   答. $\sqrt{10}$ (5 点)

2. 与式$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left\{\cos\left(\dfrac{11}{18}\pi - \dfrac{5}{18}\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{11}{18}\pi - \dfrac{5}{18}\pi\right)\right\} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\dfrac{1}{3}\pi + i\sin\dfrac{1}{3}\pi\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3}{4}i$

   答. $\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3}{4}i$ (5 点)

3. $r = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ であり、偏角は $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$ $\left(\because \cos\theta = -\dfrac{1}{2},\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。よって、$-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi$

   答. $\cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi$ (5 点)

入学前教育課題 No.2 (解答と配点)

赤い数字は、配点です

VI. 平面上のベクトル (合計 25 点)

1. (1) $\vec{a}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$ より

   答. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$ (2 点)

   (2) $\overrightarrow{\mathrm{CO}}=\vec{a}$ より $\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\vec{a}+\vec{b}$。

   答. $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-\vec{a}-\vec{b}$ (2 点)

   (3) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}=2\overrightarrow{\mathrm{BO}}$ より

   答. $\overrightarrow{\mathrm{BD}}=-2\vec{b}$ (2 点)

   (4) $\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ より

   答. $\overrightarrow{\mathrm{CD}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\vec{a}$ (2 点)

2. ($|\vec{a}+\vec{b}|^2=7$ を利用)

   (1) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$ により、$2^2+3^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=7$ である。$2\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$ より $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$

   答. -3 (2 点)

   (2) $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-3}{2\cdot3}=-\frac{1}{2}$ である。$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より $\theta=120^\circ$

   答. 120° (2 点)

   (3) $|\vec{a}-3\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}=2^2+9\cdot3^2-6\cdot(-3)=103$ である。$|\vec{a}-3\vec{b}|>0$ より $|\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{103}$

   答. $\sqrt{103}$ (2 点)

3. (△ABN と △ACM それぞれにおいて AP を分点の位置ベクトルとして表す)

   BP : PN $=s:(1-s)$, CP : PM $=t:(1-t)$ とおくと、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AN}}=(1-s)\vec{b}+\frac{3}{5}s\vec{c}\cdots(1)$。. また $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t\overrightarrow{\mathrm{AM}}=(1-t)\vec{c}+\frac{2}{3}t\vec{b}\cdots(2)$。(1), (2) により、$(1-s)\vec{b}+\frac{3}{5}s\vec{c}=(1-t)\vec{c}+\frac{2}{3}t\vec{b}$ である。係数比較して、$1-s=\frac{2}{3}t$, $\frac{3}{5}s=1-t$ ($\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{c}\neq\vec{0}$, $\vec{b}$ と $\vec{c}$ は平行でないことに注意) である。これを解いて $s=\frac{5}{9}$, $t=\frac{2}{3}$ となる。よって $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

   答. $\frac{4}{9}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$ (5 点)

4. (異なる 2 点 A ($\vec{a}$), B ($\vec{b}$) を通る直線のベクトル方程式を利用)

2 点 $(-3,2)$, $(2,-4)$ を通る任意の点を (x,y) とすると、$(x,y)=(1-t)(-3,2)+t(2,-4)=(-3(1-t)+2t, 2(1-t)-4t)=(5t-3,-6t+2)$ となる。よって

$$\begin{cases} x=5t-3 \cdots (1) \\ y=-6t+2 \cdots (2) \end{cases}$$

（ただし t は媒介変数）となる。$6\times(1)+5\times(2)$ を計算して t を消去すれば、$6x+5y+8=0$ を得る。

答. $x=5t-3,\ y=-6t+2$ (3 点), $6x+5y+8=0$, (3 点)

VII. 空間座標とベクトル (合計 22 点)

1. $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AF}}+\overrightarrow{\mathrm{FM}}=\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$
$\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\overrightarrow{\mathrm{GH}}+\overrightarrow{\mathrm{HC}}=-\vec{a}-\vec{b}$
$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CH}}=-\vec{a}+\vec{c}+\vec{b}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$
$\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\overrightarrow{\mathrm{CH}}+\overrightarrow{\mathrm{HG}}+\overrightarrow{\mathrm{GM}}=\vec{b}+\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

答. $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$ (2 点), $\overrightarrow{\mathrm{GC}}=-\vec{a}-\vec{b}$, (2 点)

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ (2 点), $\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\vec{a}+\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$, (2 点)

2. $\vec{d}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ より
$(-2,-2,4)=l(2,1,3)+m(-1,0,1)+n(2,3,1)=(2l-m+2n, l+3n, 3l+m+n)$。したがって $2l-m+2n=-2$, $l+3n=-2$, $3l+m+n=4$ である。これを解いて $l=1$, $m=2$, $n=-1$ である。よって $\vec{d}=\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$

答. $\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$ (5 点)

3. (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3-(-2),1-1,4-3)=(-1,0,1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-3-(-2),3-1,5-3)=(-1,2,2)$ である。よって $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1)\times(-1)+0\times2+1\times2=3$ となる。$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}=3$ により、$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\frac{3}{\sqrt{2}\times3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。$0^\circ<\theta<180^\circ$ より $\theta=45^\circ$

答. 45° (2 点)

(2) $S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta$ より、$S=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times3\times\sin45^\circ=\frac{3}{2}$

答. $\frac{3}{2}$ (2 点)

4. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると、点 P は直線 OQ 上にあるので $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k(\vec{a}+\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c})=k\vec{a}+k\vec{b}+\frac{3}{5}k\vec{c}\cdots(1)$ である。また、点 P は平面 ABC 上にあるので、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と表わせる。よって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$ より、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\cdots(2)$。4 点 O, A, B, C は同一平面上にないから、(1), (2) の係数比較をすると $k=1-s-t$, $k=s$, $\frac{3}{5}k=t$ により、$k=\frac{5}{13}$ である。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{5}{13}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であるから $\mathrm{OP}:\mathrm{PQ}=5:8$

答. $5:8$ (5 点)

VIII. 導関数 (合計 12 点)

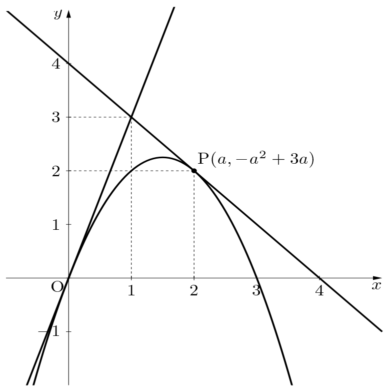
1. (1) $\frac{y\text{ の変化量}}{x\text{ の変化量}} = \frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} = \frac{(1+h)^2-(1+h)-0}{h} = \frac{h^2+h}{h} = \frac{h(h+1)}{h} = h+1$

答. $h+1$ (3 点)

(2) x の変化量を限りなく 0 に近づけたものが微分係数であるから、$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} = \lim_{h\to 0}(h+1) = 1$

答. 1 (3 点)

2. $f(x) = -x^2+3x$ とおくと $f'(x) = -2x+3$ である。接点を $\mathrm{P}(a, -a^2+3a)$ とすると、接線の傾きは $f'(a) = -2a+3$ である。よって接線の方程式は、$y-(-a^2+3a) = (-2a+3)(x-a)$ であり、この式を整理すると $y = (-2a+3)x + a^2 \cdots (1)$



(1) が点 $(1,3)$ を通るから、$3 = (-2a+3)\times 1 + a^2$ である。よって $a^2-2a = 0$, $a(a-2) = 0$ によって、 $a = 0, 2$ である。これらを (1) に代入して、$a = 0$ のとき $y = 3x$、$a = 2$ のとき $y = -x+4$ となる。

答. $y = 3x$, $y = -x+4$ (6 点)

IX. 不定積分 (合計 19 点)

1. (1) 与式 $= \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 2x + C$

答. $\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 2x + C$ (3 点)

(2) 与式 $= \int(-3x^2-5x+2)dx = -x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + C$

答. $-x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + C$ (3 点)

(3) 与式 $= \int\{(t+2)(t(t-1)-(t^2-1))\}dt = \int(t+2)(-t+1)dt = \int(-t^2-t+2)dt = -\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t + C$

答. $-\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t + C$ (3 点)

2. (1) $f(x) = \int f'(x)dx = \int(3x^2-2x)dx = x^3 - x^2 + C$ である。$f(2) = 0$ より、$f(2) = 2^3 - 2^2 + C = 0$ である。よって $C = -4$ であり、$f(x) = x^3 - x^2 - 4$

答. $f(x) = x^3 - x^2 - 4$ (5 点)

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(x, f(x))$ における接線の傾きは、$f'(x)$ である。$f'(x) = x^2 - 1$ であるので、$f(x) = \int f'(x)dx = \int(x^2-1)dx = \frac{x^3}{3} - x + C$ である。また、曲線 $y = f(x)$ は点 $(1,0)$ を通るから、$f(1) = 0$ より $\frac{1^3}{3} - 1 + C = 0$。よって、$C = \frac{2}{3}$ であり、$f(x) = \frac{x^3}{3} - x + \frac{2}{3}$

答. $f(x)=\frac{x^3}{3}-x+\frac{2}{3}$ (5 点)

X. 極限 (合計 22 点)

1. (1) 与式 $=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}=2$

答. 2 (1 点)

(2) 与式 $=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

答. 0 (1 点)

(3) $-1\leqq\sin n\theta\leqq 1$ より $-\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{n}\sin n\theta\leqq\frac{1}{n}$ である。$\lim_{n\to\infty}(-\dfrac{1}{n})=0$, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ より、$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sin n\theta=0$

答. 0 (1 点)

(4) 与式 $=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{4}{5})^n-1}{(\frac{3}{5})^n+1}=-1$

答. -1 (1 点)

(5) 与式 $=\lim_{n\to\infty}\log_2 3^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\log_2 3=0$

答. 0 (1 点)

(6) 与式 $=\lim_{x\to-1}\dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to-1}\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{1}{3}$

答. $\frac{1}{3}$ (1 点)

(7) 与式 $=\lim_{x\to1}\dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

答. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (1 点)

(8) 与式 $=\lim_{x\to0}\dfrac{3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}{2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}}=\dfrac{3\times1}{2\times1}=\dfrac{3}{2}$

答. $\frac{3}{2}$ (1 点)

(9) 与式 $=\lim_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\dfrac{1}{1+\cos x}(\dfrac{\sin x}{x})^2=\dfrac{1}{2}$

答. $\frac{1}{2}$ (1 点)

(10) 与式 $=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2^x}{(\frac{3}{2})^x+1}=0$

答. 0 (1 点)

2. (i) $0<r<1$ のとき。$\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=0$ であるので、$\lim_{n\to\infty}\dfrac{r^{n+1}}{1+r^n}=\dfrac{0}{1+0}=0$

(ii) $r=1$ のとき。$\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=1$ であるので、$\lim_{n\to\infty}\dfrac{r^{n+1}}{1+r^n}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

(iii) $r>1$ のとき。$0<\frac{1}{r}<1$ より、$\lim_{n\to\infty}(\dfrac{1}{r})^n=0$ である。よって $\lim_{n\to\infty}\dfrac{r^{n+1}}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{r}{(\frac{1}{r})^n+1}=\dfrac{r}{0+1}=r$

答. $0 < r < 1$ のとき 0 に収束、$r = 1$ のとき $\frac{1}{2}$ に収束、$r > 1$ のとき r に収束　(6 点)

3. (ヒント: $x \to 1$ のとき、分母 $x - 1 \to 0$ であるから、極限値が $\sqrt{2}$ であるためには、分子 $a\sqrt{x+1} - b \to 0$ である (そうでないときは、極限値が $\sqrt{2}$ になることはない)。このとき、極限を計算して $\sqrt{2}$ となるように a, b の値を定める。つまり、$\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ かつ $\lim_{x \to c} g(x) = 0$ なら $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ である。)
ヒントより $\lim_{x \to 1}(x-1) = 0$ なので $\lim_{x \to 1}(a\sqrt{x+1} - b) = 0$ である。よって $\sqrt{2}a - b = 0$ より $b = \sqrt{2}a \cdots (1)$ となる。$\lim_{x \to 1} \dfrac{a\sqrt{x+1} - \sqrt{2}a}{x-1} = \lim_{x \to 1} \dfrac{a(\sqrt{x+1} - \sqrt{2})}{x-1} = a \cdot \lim_{x \to 1} \dfrac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = a \cdot \lim_{x \to 1} \dfrac{(x+1) - 2}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = a \cdot \lim_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$ であり、この値が与式の右辺 $\sqrt{2}$ に等しいから $\frac{a}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, よって $a = 4$ である。この値を (1) に代入して $b = 4\sqrt{2}$

答. $a = 4, b = 4\sqrt{2}$　(6 点)

入学前教育課題 No. 3（解答と配点）

赤い数字は、配点です

XI. 微分 (合計 42 点)

1. (1) $y = (2x+3)^{-1}$ より、$y' = -\frac{(2x+3)'}{(2x+3)^2} = -\frac{2}{(2x+3)^2}$

答. $-\frac{2}{(2x+3)^2}$ (3 点)

(2) $y = (2x+1)^{\frac{1}{4}}$ より、$y' = \frac{1}{4}(2x+1)^{\frac{1}{4}-1} \cdot (2x+1)' = \frac{1}{4}(2x+1)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2 = \frac{1}{2\sqrt[4]{(2x+1)^3}}$

答. $\frac{1}{2\sqrt[4]{(2x+1)^3}}$ (3 点)

(3) $y' = 3\cos^2 x \cdot (\cos x)' = 3\cos^2 x \cdot (-\sin x) = -3\cos^2 x \sin x$

答. $-3\cos^2 x \sin x$ (3 点)

(4) $y' = (x)' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)' = \sin x + x\cos x$

答. $\sin x + x\cos x$ (3 点)

(5) $y' = \frac{(2x-1)'}{(2x-1)\log 5} = \frac{2}{(2x-1)\log 5}$

答. $\frac{2}{(2x-1)\log 5}$ (3 点)

(6) $y' = x'e^x + x \cdot (e^x)' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

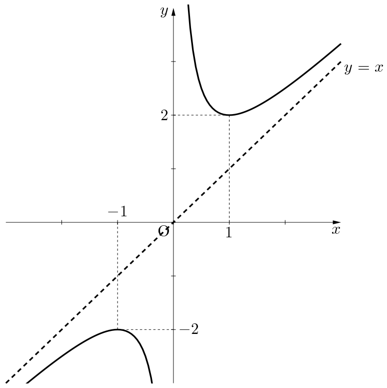
答. $(1+x)e^x$ (3 点)

2. グラフ (6 点)

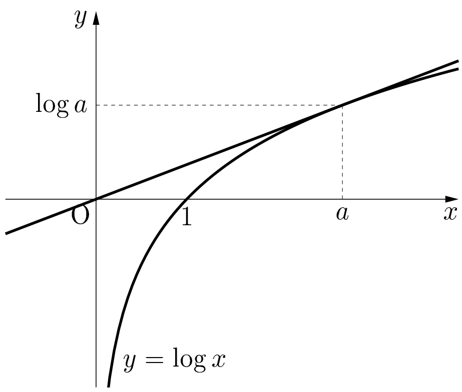
$y = \frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$, $y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$ である。$y' = 0$ となる x の値は $x = \pm 1$ である。$y'' = -\frac{-2}{x^3} = \frac{2}{x^3}$ であるので、$x = 0$ のとき y, y', y'' の値は存在しない (分母が 0 になるので)。これらのことから y', y'' の符号、y の増減、凹凸の表は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	／	$+$	$+$	$+$
y	↗	極大 -2	↘	／	↘	極小 2	↗

また $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ より曲線 $y = x + \frac{1}{x}$ は $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ のとき $y = x$ に限りなく近づく。さらに $\displaystyle\lim_{x\to+0} y = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-0} y = -\infty$ である。よって直線 $y = x$ と y 軸は、この曲線の漸近線である。曲線の概形は下の図のようになる。



3. 接点の座標を $(a, \log a)$ とおく。$y' = \frac{1}{x}$ より接線の方程式は $y - \log a = \frac{1}{a}(x-a)$ である。この直線は原点 $(0,0)$ を通るから $0 - \log a = \frac{1}{a}(0-a)$、よって $\log a = 1$, $a = e$ である。求める接線の方程式は $y - 1 = \frac{1}{e}(x-e)$ より $y = \frac{1}{e}x$

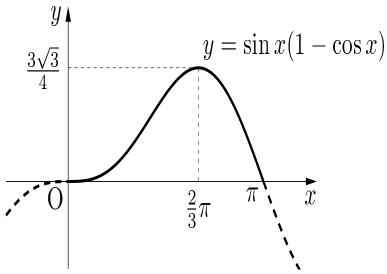


答. $y = \frac{1}{e}x$ (6 点)

4. $y' = \cos x(1-\cos x) + \sin x \cdot \sin x = \cos x - \cos^2 x + (1-\cos^2 x) = -2\cos^2 x + \cos x + 1 = -(2\cos x + 1)(\cos x - 1)$ である。$0 \leqq x \leqq \pi$ において、$y' = 0$ となる x の値は、$\cos x = -\frac{1}{2}$ のとき $x = \frac{2}{3}\pi$, $\cos x = 1$ のとき $x = 0$ である。

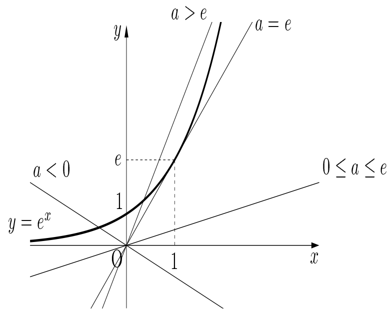
x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	極大 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0

グラフは下のようになる。



答. $x = \frac{2}{3}\pi$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $x = 0, \pi$ のとき最小値 0 (6 点)

5. $y = e^x$ と $y = ax$ のグラフは下のようになる。



上の 2 つのグラフは $a = e$ のとき点 $(1, e)$ で接する。これらのことより実数解の個数は、

答. $a < 0$ のとき 1 個、$0 \leqq a < e$ のとき 0 個、$a = e$ のとき 1 個、$a > e$ のとき 2 個 (6 点)

XII. 積分 (合計 58 点)

1. (1) $\int_0^4 \sqrt{x}dx = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}} - 0 = \frac{16}{3}$

答. $\frac{16}{3}$ (3 点)

(2) 与式 $= \int_1^2 \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) dx = 2\int_1^2 \frac{1}{x}dx + 3\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = 2\left[\log x\right]_1^2 - 3\left[\frac{1}{x}\right]_1^2 = 2\log 2 + \frac{3}{2}$

答. $2\log 2 + \frac{3}{2}$ (3 点)

(3) 与式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

答. $\frac{\pi}{4}$ (3 点)

(4) $2 - x = t$ 即ち $x = 2 - t$ とおく。$\frac{dx}{dt} = -1$ より $dx = -dt$ である。$x = 0$ のとき $t = 2$、$x = 2$ のとき $t = 0$ なので、与式 $= \int_2^0 (2 - t)\, t^3\, (-dt) = \frac{8}{5}$

答. $\frac{8}{5}$ (3 点)

(5) $x = 2\sin\theta$ とおくと $\frac{dx}{d\theta} = 2\cos\theta$ である。$0 \leqq x \leqq 2$ より $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ である。よって、$\cos\theta \geq 0$ である。与式 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta \cdot 2\cos\theta d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = 2\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$

答. π (3 点)

(6) 与式 $= \int_1^e \log x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right)' dx = \left[\log x \cdot \frac{1}{2}x^2\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e = \frac{e^2+1}{4}$

答. $\frac{e^2+1}{4}$ (3 点)

(7) 与式 $= \int_0^1 (2x+1)(e^x)'dx = [(2x+1)e^x]_0^1 - [2e^x]_0^1 = (3e-1)-(2e-2) = e+1$

答. $e+1$ (3 点)

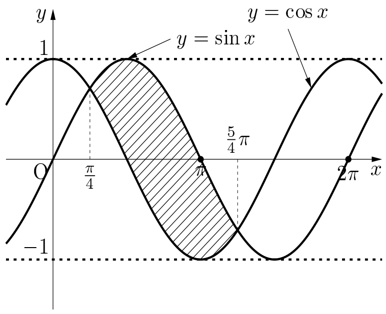
(8) 与式 $= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = 2[\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 0\right) = \sqrt{2}$

答. $\sqrt{2}$ (3 点)

2. $(x-t)\cos t$ を t で積分するから、x は定数とみなす。$F(x) = x\int_0^x \cos t dt - \int_0^x t\cdot\cos t dt$ であるので、$F'(x) = (x)'\int_0^x \cos t dt + x\left(\frac{d}{dx}\int_0^x \cos t dt\right) - \frac{d}{dt}\int_0^x t\cos t dt = \int_0^x \cos t dt + x\cos x - x\cos x = [\sin t]_0^x = \sin x$

答. $\sin x$ (6 点)

3. 2 曲線の交点の x 座標は $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$ である。また区間 $\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{5}{4}\pi$ において、下図のように $\sin x \geqq \cos x$ である。



よって求める面積は $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (\sin x - \cos x)dx = [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}$

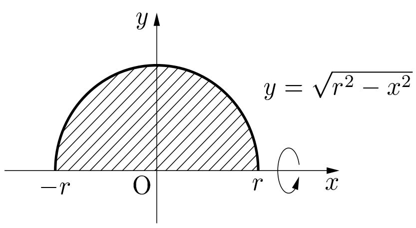
答. $2\sqrt{2}$ (6 点)

4. (放物線、直線とも x で表し、y で積分する)

$x = y^2$, $x = y+2$ より $y^2 = y+2$ である。これより交点の y 座標は $y = -1, 2$ となる。また、区間 $-1 \leqq y \leqq 2$ において $y^2 \leqq y+2$ である。求める面積は $\int_{-1}^2 \left\{(y+2) - y^2\right\} dy = \int_{-1}^2 (-y^2+y+2)dy = \left[-\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2y\right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}$

答. $\frac{9}{2}$ (6 点)

5. 半円 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ を、区間 $-r \leqq x \leqq r$ において x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を考える。



体積 V は、$V = \pi\int_{-r}^r y^2 dx = \pi\int_{-r}^r (r^2 - x^2)dx = 2\pi\int_0^r (r^2 - x^2)dx = 2\pi\left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^r = \frac{4}{3}\pi r^3$

答. $\frac{4}{3}\pi r^3$ (6 点)

6. (1) $y^2 = 4 - \frac{4}{9}x^2$ $(-3 \leqq x \leqq 3)$。よって求める体積 V_1 は、$V_1 = \pi \int_{-3}^{3} y^2 dx = \pi \int_{-3}^{3} \left(4 - \frac{4}{9}x^2\right) dx = 2\pi \left[4x - \frac{4}{27}x^3\right]_0^3 = 16\pi$

答. 16π (5 点)

(2) $x^2 = 9 - \frac{9}{4}y^2$ $(-2 \leqq y \leqq 2)$。よって求める体積 V_2 は、$V_2 = \pi \int_{-2}^{2} x^2 dy = \pi \int_{-2}^{2} \left(9 - \frac{9}{4}y^2\right) dy = 2\pi \left[9y - \frac{3}{4}y^3\right]_0^2 = 24\pi$

答. 24π (5 点)