

|                                                                                                                                                    |                                   |      |         |              |                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|------|---------|--------------|-----------------|
| 入 試<br>年度                                                                                                                                          | 2026 年度                           | 入試時期 | I 期入学試験 | 実施日          | 2025 年 7 月 19 日 |
| 課程                                                                                                                                                 | 博士前期課程                            | 研究科  | 理工学研究科  | 専攻・コース       | 数学専攻            |
| 入 試<br>方式                                                                                                                                          | 一般入学試験<br>外国人留学生入学試験<br>社会人特別入学試験 |      | 試験科目    | 基礎科目<br>専門科目 |                 |
| 「出題の意図」                                                                                                                                            |                                   |      |         |              |                 |
| 数学の学習上必須である基礎的な素養として、線形代数と微分積分に関する十分な理解があるかを確認するため基礎問題 2 題を出題しました。また専門問題は、大学 2,3 年次に専門的に学ぶ内容に関する問いを通して、大学院進学後の学びにスムーズに移行するための準備状況を確認することを目的としています。 |                                   |      |         |              |                 |
| 「解答」または「解答例」                                                                                                                                       |                                   |      |         |              |                 |
| 別紙参照                                                                                                                                               |                                   |      |         |              |                 |
| 合否判定の方法及び基準                                                                                                                                        |                                   |      |         |              |                 |
| 入学試験は理工学研究科のアドミッションポリシーに基づき、これを満たす学生を選抜することを目的に実施しています。<br>本研究科のアドミッションポリシーに基づき、総合的な視点により合否を判断しています。                                               |                                   |      |         |              |                 |

2026 年度 I 期入学試験 問題及び解答用紙

|                                                                           |                                                                           |                    |    |  |
|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|--------------------|----|--|
| 課程                                                                        | 受験科目                                                                      | 明治大学大学院理工学研究科 数学専攻 |    |  |
| <input checked="" type="checkbox"/> 博士前期<br><input type="checkbox"/> 博士後期 | <input type="checkbox"/> 英 語                                              | 受験番号               | 氏名 |  |
|                                                                           | <input checked="" type="checkbox"/> 基礎・専門<br><input type="checkbox"/> 小論文 |                    |    |  |

問題 1. 基礎科目試験問題 線形代数

- (1)  $V$  を実数体上のベクトル空間とし,  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  および  $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n\}$  が共に  $V$  の基底とする. 次の問に答えよ.
- a)  $\{\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  が  $V$  の基底となるような  $\mathbf{y}_i$  が存在することを示せ.
- b)  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{y}_{i+1}, \dots, \mathbf{y}_n\}$  が  $V$  の基底となるような  $\mathbf{y}_i$  が存在することを示せ.
- (2)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  とおく. 次の問に答えよ.
- a)  $A$  は正規行列となることを確かめよ.
- b)  $U^{-1}AU$  が対角行列となるようなユニタリー行列  $U$  を求めよ.
- c)  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$  で定まる  $\mathbb{R}^2$  の線形変換を  $f$  で表わす.  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  とおくとき,  $\mathbb{R}^2$  の基底  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$  に関する  $f$  の表現行列を求めよ.

解答欄

- (1)
- a)  $\{\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  が基底でなかったら,  $b\mathbf{y}_i + c_2\mathbf{x}_2 + \dots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$  となる  $(b, c_2, \dots, c_n) \neq (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  がとれる. このとき  $b \neq 0$ . もし, すべての  $i$  で  $\{\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  が基底にならないと仮定すると,  $\langle \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n \rangle \subset \langle \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \rangle$  となり矛盾.
- b)  $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$  は一次従属なので  $b\mathbf{x}_1 + c_1\mathbf{y}_1 + \dots + c_n\mathbf{y}_n = \mathbf{0}$  となる  $(b, c_1, \dots, c_n) \neq (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  がとれる. このとき  $b \neq 0$  であり  $(c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$  となる.  $c_i \neq 0$  となる  $i$  をとれば  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{y}_{i+1}, \dots, \mathbf{y}_n\}$  が  $V$  を生成して基底となる.
- (2)
- a)  $A^* = {}^tA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . よって  $AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^*A$ .
- b) 固有値は  $\pm i$ . 固有空間は  $W(i) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \rangle$  と  $W(-i) = \langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$  であり, 内積は  $(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}) = 0$  となり直交する. よって  $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$  とおくと,  $U$  はユニタリー行列であり,  $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$  となる.
- c)  $X$  を表現行列とすると  $(f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})) = (A\mathbf{a}, A\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})X$  となるので  $A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X$ . よって  $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -13 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ .

解答を続ける場合は、この用紙の裏面に記入すること。

|     |  |
|-----|--|
| 点 数 |  |
|-----|--|

$f(x) = x \log(x^2 + 1)$ ,  $g(x) = \arctan(x)$  とおくとき, 以下の問に答えよ。

なお,  $\log$  は自然対数であり,  $y = \arctan(x)$  は  $y = \tan x$   $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$  の逆関数である。

(1) 不定積分  $\int x \arctan(x) dx$  を求めよ。

(2)  $h(x) = f(x) - g(x)$  とおくとき, 以下の問に答えよ。

a)  $h(x)$  の導関数  $h'(x)$  は, 区間  $x > 0$  において単調増加であることを示せ。

b) ある正の実数  $a$  が存在して, 区間  $0 < x < a$  で  $h(x) < 0$ , 区間  $x > a$  で  $h(x) > 0$  となることを示せ。

(3)  $F(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ ,  $G(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$ ,  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  とおくとき, 二重積分  $\iint_D |F(x, y) - G(x, y)| dx dy$  を計算せよ。なお, 必要あれば  $0.69 < \log 2 < 0.7$  であることを用いよ。

### 解答例

$$(1) \int x \arctan(x) dx = \frac{1}{2}(x^2 + 1) \arctan(x) - \frac{1}{2}x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(2) a)  $h(x) = f(x) - g(x)$  について,

$$h'(x) = \log(x^2 + 1) + \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}, \quad h''(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{6x}{(x^2 + 1)^2} > 0 \quad (x > 0)$$

より  $h'(x)$  は  $x > 0$  において単調増加する。

b)  $h'(0) = -1 < 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} h'(x) = \infty$  より,  $h'(x)$  は  $x > 0$  において連続であることに注意して「中間値の定理」を用いると,  $h'(x)$  は  $x > 0$  において単調増加するので,

$$\exists b > 0 \quad \text{s.t.} \quad h'(x) < 0 \quad (x \in (0, b)), \quad h'(b) = 0, \quad h'(x) > 0 \quad (x \in (b, \infty))$$

となる。よって,  $h(x)$  は  $0 < x < b$  で単調減少かつ  $h(0) = 0$  より  $h(b) < 0$  となる。また,  $h(x)$  は  $x > b$  で単調増加かつ  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$  であることから,  $h(x)$  は  $x > b$  において連続であることに注意し, 改めて「中間値の定理」を用いると,

$$\exists a \in (b, \infty) \quad \text{s.t.} \quad h(x) < 0 \quad (x \in (0, a)), \quad h(a) = 0, \quad h(x) > 0 \quad (x \in (a, \infty))$$

となる。ゆえに, ある正の実数  $a$  が存在して,  $0 < x < a$  で  $h(x) < 0$ ,  $x > a$  で  $h(x) > 0$  となる。

(3) (2) より,  $0 < x < a$  で  $f(x) < g(x)$ , 区間  $x > a$  で  $f(x) > g(x)$  を得る。さらに,  $\pi > 3$  より

$$h(1) = f(1) - g(1) = \log 2 - \frac{\pi}{4} < 0.7 - 0.75 = -0.05 < 0$$

となることから  $1 \in (0, a)$  が言えるので,  $0 < \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$  において  $f(\sqrt{x^2 + y^2}) < g(\sqrt{x^2 + y^2})$  が成り立つ。したがって,  $(x, y) \in D \setminus \{(0, 0)\}$  に対して,  $F(x, y) < G(x, y)$  が成立するため,

$$\begin{aligned} \iint_D |F(x, y) - G(x, y)| dx dy &= \iint_D \{G(x, y) - F(x, y)\} dx dy \\ &= \iint_D \{g(\sqrt{x^2 + y^2}) - f(\sqrt{x^2 + y^2})\} dx dy = (*) \end{aligned}$$

を得る。 $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  とおくと,  $D$  に対応する領域は  $K = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  となるので,

$$(*) = \iint_K \{g(r) - f(r)\} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \{r \arctan(r) - r^2 \log(r^2 + 1)\} dr \right) d\theta = \frac{\pi}{18} (15\pi - 12 \log 2 - 34)$$

と求まる。

2026 年度 I 期入学試験 問題及び解答用紙

|                                                                           |                                                                           |                    |    |  |
|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|--------------------|----|--|
| 課程                                                                        | 受験科目                                                                      | 明治大学大学院理工学研究科 数学専攻 |    |  |
| <input checked="" type="checkbox"/> 博士前期<br><input type="checkbox"/> 博士後期 | <input type="checkbox"/> 英 語                                              | 受験番号               | 氏名 |  |
|                                                                           | <input checked="" type="checkbox"/> 基礎・専門<br><input type="checkbox"/> 小論文 |                    |    |  |

問題 3. 専門科目試験問題 代数系

$A, B$  は群,  $\text{Aut}(A)$  は  $A$  の自己同型群,  $\rho: B \rightarrow \text{Aut}(A)$  は準同型写像としたとき,  $b \in B$  に対して,  $\text{Aut}(A)$  の元  $\rho(b)$  を単に  $\rho_b$  と書き表すことにする。

(1)  $A, B$  は群,  $\rho: B \rightarrow \text{Aut}(A)$  は準同型とする。  $a_1, a_2 \in A$  と  $b_1, b_2 \in B$  に対して,

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 \cdot \rho_{b_1}(a_2), b_1 \cdot b_2)$$

によって直積集合  $A \times B$  上に演算を定義する。この演算により,  $A \times B$  は群になることを証明せよ。

以下, 直積群と区別するため, この群を  $A \rtimes_{\rho} B$  と表す。

(2)  $G, Q$  は群,  $p: G \rightarrow Q$  は準同型,  $N = \text{Ker}(p)$  とおく。また,  $s: Q \rightarrow G$  は,  $p \cdot s = \text{id}_Q$  をみたす準同型とする。このとき, 準同型  $\varphi: Q \rightarrow \text{Aut}(N)$  をうまく定義することにより,  $f((n, q)) = n \cdot s(q)$  (ただし,  $n \in N, q \in Q$ ) で定まる射  $f: N \rtimes_{\varphi} Q \rightarrow G$  は同型写像になることを証明せよ。

解答欄

(1) を示す。  $\rho_{b_1} \rho_{b_2} = \rho_{b_1 b_2}$  を用いれば, 結合法則が成立することがわかる。  $(e, e)$  は単位元になる。  $((\rho_{b^{-1}}(a))^{-1}, b^{-1})$  が  $(a, b)$  の逆元になる。 よって  $A \rtimes_{\rho} B$  は群である。

(2) を示す。まず,  $f$  が準同型になるように  $\varphi$  を定めたい。

$$\begin{aligned} f((n_1, q_1))f((n_2, q_2)) &= n_1 s(q_1) n_2 s(q_2) \\ f((n_1, q_1)(n_2, q_2)) &= f((n_1 \varphi_{q_1}(n_2), q_1 q_2)) = n_1 \varphi_{q_1}(n_2) s(q_1 q_2) \end{aligned}$$

上の二式が任意の  $n_1, n_2 \in N$  と  $q_1, q_2 \in Q$  に対して一致するためには,  $\varphi_{q_1}(n_2) = s(q_1) n_2 s(q_1)^{-1}$  でなくてはならない。逆にこのように  $\varphi_q$  を定義すれば, 確かに  $\varphi_q \in \text{Aut}(N)$  であり,  $\varphi_{q_1} \varphi_{q_2} = \varphi_{q_1 q_2}$  となるので準同型  $\varphi: Q \rightarrow \text{Aut}(N)$  が定まり,  $f$  は準同型になる。この  $f$  が全単射であることは容易に確認できる。

解答を続ける場合は、この用紙の裏面に記入すること。

|     |  |
|-----|--|
| 点 数 |  |
|-----|--|

2026 年度 I 期入学試験 問題及び解答用紙

|                                                                           |                                                                           |                    |    |  |
|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|--------------------|----|--|
| 課程                                                                        | 受験科目                                                                      | 明治大学大学院理工学研究科 数学専攻 |    |  |
| <input checked="" type="checkbox"/> 博士前期<br><input type="checkbox"/> 博士後期 | <input type="checkbox"/> 英 語                                              | 受験番号               | 氏名 |  |
|                                                                           | <input checked="" type="checkbox"/> 基礎・専門<br><input type="checkbox"/> 小論文 |                    |    |  |

問題 4. 専門科目試験問題 代数系

$\mathbb{R}$  は実数体とする。 $x$  は変数であり、 $\mathbb{R}[x]$  は  $\mathbb{R}$  上の一変数多項式環とする。

(1) 定数でない  $f(x) \in \mathbb{R}[x]$  は、有限個の一次式と有限個の二次式の積に因数分解できることを証明せよ。(代数学の基本定理は証明なしに使ってよい。)

(2)  $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$  で  $g(x) \neq 0$  とする。このとき、 $f(x)/g(x)$  は、

- $\mathbb{R}[x]$  の元,
- $\frac{a}{(x+b)^n}$  の形の元 (ただし、 $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $n$  は自然数),
- $\frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}$  の形の元 (ただし、 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ,  $n$  は自然数で、 $x^2 + cx + d = 0$  は実数解を持たない)

らの有限和として書き表せることを証明せよ。

解答欄

$\deg(f)$  は多項式  $f$  の次数を表すものとする。

(1) は、 $\deg(f)$  に関する数学的帰納法によって容易に証明できる。

(2) を示す。 $\deg(g) = 0$  なら、 $f/g \in \mathbb{R}[x]$  である。 $\deg(g) > 0$  としよう。 $g = g_1 g_2$  と因数分解され、 $g_1$  と  $g_2$  が互いに素なら、 $f/g = f_1/g_1 + f_2/g_2$  と変形できる。故に、(1) によって、 $g$  は一次式あるいは既約な二次式  $h$  の冪である場合に考えればよいことがわかる。 $f/h^a$  を式変形したい。 $f$  を  $h^a$  で割り、次にその余りを  $h^{a-1}$  で割り、次にその余りを  $h^{a-2}$  で割り、これを繰り返す。すると、

$$f = q_1 h^a + q_2 h^{a-1} + q_3 h^{a-2} + \cdots + q_a h + q_{a+1}$$

と書ける。ここで、構成法により、 $q_2, q_3, \dots, q_{a+1}$  の次数は  $\deg(h)$  より小さい。よって、

$$\frac{f}{h^a} = q_1 + \frac{q_2}{h} + \frac{q_3}{h^2} + \cdots + \frac{q_a}{h^{a-1}} + \frac{q_{a+1}}{h^a}$$

と書ける。

解答を続ける場合は、この用紙の裏面に記入すること。

|     |  |
|-----|--|
| 点 数 |  |
|-----|--|

2026 年度 I 期入学試験 問題及び解答用紙

|                                                                           |                                                                           |                    |    |  |
|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|--------------------|----|--|
| 課程                                                                        | 受験科目                                                                      | 明治大学大学院理工学研究科 数学専攻 |    |  |
| <input checked="" type="checkbox"/> 博士前期<br><input type="checkbox"/> 博士後期 | <input type="checkbox"/> 英 語                                              | 受験番号               | 氏名 |  |
|                                                                           | <input checked="" type="checkbox"/> 基礎・専門<br><input type="checkbox"/> 小論文 |                    |    |  |

問題 5. 専門科目試験問題 幾何系

- (1)  $I$  を  $0$  を含む  $\mathbb{R}$  の開集合とする。 $C^\infty$  級関数  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  は,  $f(0) = g(0) = 0$  かつ任意の  $x \in I$  に対して  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  をみたすとする。 $\mathbb{R}^2$  内の曲線  $c_f(t) = (t, f(t))$ ,  $c_g(t) = (t, g(t))$  ( $t \in I$ ) の曲率をそれぞれ  $\kappa_f(t)$ ,  $\kappa_g(t)$  で表す。このとき,  $0 \leq \kappa_f(0) \leq \kappa_g(0)$  が成り立つことを示せ。
- (2)  $D$  を  $(0, 0)$  を含む  $\mathbb{R}^2$  の開集合とする。 $C^\infty$  級関数  $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G: D \rightarrow \mathbb{R}$  は,  $F(0, 0) = G(0, 0) = 0$  かつ任意の  $(x, y) \in D$  に対して  $0 \leq F(x, y) \leq G(x, y)$  をみたすとする。パラメータ表示  $p_F(x, y) = (x, y, F(x, y))$ ,  $p_G(x, y) = (x, y, G(x, y))$  ( $(x, y) \in D$ ) により表される  $\mathbb{R}^3$  内の曲面  $M_F$ ,  $M_G$  のガウス曲率をそれぞれ  $\kappa_F(x, y)$ ,  $\kappa_G(x, y)$  で表す。このとき,  $0 \leq \kappa_F(0, 0) \leq \kappa_G(0, 0)$  が成り立つことを示せ。

解答欄

(以下はひとつの解答例の概略です。)

- (1)  $f(x), g(x)$  は  $x = 0$  で極小値をとるから,  $f'(0) = g'(0) = 0$  である。一般に, 平面曲線  $c(t)$  の曲率は  $\kappa(t) = \frac{\det(c'(t) \ c''(t))}{|c'(t)|^3}$  と表されるから,  $\kappa_f(0) = f''(0)$ ,  $\kappa_g(0) = g''(0)$  を得る。
- 仮に  $0 > \kappa_f(0)$  であるとする。このとき  $f'(0) = 0$ ,  $0 > f''(0)$  だから, ある  $\epsilon > 0$  が存在して, 任意の  $t \in (0, \epsilon)$  に対して  $f'(t) < 0$  をみたす。よって, 任意の  $t \in (0, \epsilon)$  に対して  $f(t) < 0$  をみたすことになり, 仮定に矛盾する。したがって,  $0 \leq \kappa_f(0)$  が成り立つ。
- $h(t) = g(t) - f(t)$  に対して上と同様の議論をすることにより,  $\kappa_f(0) \leq \kappa_g(0)$  が示される。
- (2) 2 曲面の  $(0, 0, 0)$  における法方向は  $z$  軸である。 $xz$  平面を  $z$  軸を中心に角  $\theta$  回転させた平面を  $S_\theta$  で表す。 $c_{F,\theta}$ ,  $c_{G,\theta}$  をそれぞれ  $M_F$ ,  $M_G$  を  $S_\theta$  で切った切り口である曲線とし,  $\kappa_{F,\theta}$ ,  $\kappa_{G,\theta}$  をその  $(0, 0, 0)$  における曲率とする。このとき (1) より任意の  $\theta$  に対して  $0 \leq \kappa_{F,\theta} \leq \kappa_{G,\theta}$  が成り立つ。 $\theta_{min}^F$ ,  $\theta_{max}^F$  をそれぞれ  $\kappa_{F,\theta}$  が最小, 最大となる  $\theta$  の値 (のうちのひとつ) とする。 $\theta_{min}^G$ ,  $\theta_{max}^G$  も同様に定める。このとき  $0 \leq \kappa_{F,\theta_{min}^F} \leq \kappa_{F,\theta_{min}^G} \leq \kappa_{G,\theta_{min}^G}$ ,  $0 \leq \kappa_{F,\theta_{max}^F} \leq \kappa_{G,\theta_{max}^F} \leq \kappa_{G,\theta_{max}^G}$  が成り立つ。 $\kappa_F(0, 0) = \kappa_{F,\theta_{min}^F}$ ,  $\kappa_G(0, 0) = \kappa_{G,\theta_{min}^G}$  だから,  $0 \leq \kappa_F(0, 0) \leq \kappa_G(0, 0)$  が成り立つ。

解答を続ける場合は、この用紙の裏面に記入すること。

|     |  |
|-----|--|
| 点 数 |  |
|-----|--|

2026 年度 I 期入学試験 問題及び解答用紙

|                                                                           |                                                                           |                    |    |  |
|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|--------------------|----|--|
| 課程                                                                        | 受験科目                                                                      | 明治大学大学院理工学研究科 数学専攻 |    |  |
| <input checked="" type="checkbox"/> 博士前期<br><input type="checkbox"/> 博士後期 | <input type="checkbox"/> 英 語                                              | 受験番号               | 氏名 |  |
|                                                                           | <input checked="" type="checkbox"/> 基礎・専門<br><input type="checkbox"/> 小論文 |                    |    |  |

問題 6. 専門科目試験問題 幾何系

$\mathbb{R}^3$  の部分集合  $S_1, S_2, S_3$  を  $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ ,  $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1\}$ ,  $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 1\}$  と定め,  $X = S_1 \cup S_2 \cup S_3$  とおく。また,  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$  とおき,  $Y = X \cap V$  と定める。この  $\mathbb{R}^3$  の部分集合  $X, Y$  にそれぞれ相対位相を入れる。

- (1)  $Y$  の単体分割をひとつ定め,  $Y$  の  $\mathbb{R}$  係数ホモロジー群を求めよ。  
(2)  $X$  の単体分割をひとつ定め,  $X$  の  $\mathbb{R}$  係数ホモロジー群を求めよ。

解答欄

(以下はひとつの解答例の概略です。)

- (1) 次の (a), (b) を満たす 1 次元単体複体  $K$  と同相写像  $t_K: |K| \rightarrow Y$  が存在する。

(a)  $K_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は  $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$  を満たす  $K$  の部分複体で, 次で与えられる。

$K_1 = \{|PA_1|, |A_1Q|, |QB_1|, |B_1P|, |P|, |A_1|, |Q|, |B_1|\},$   
 $K_2 = \{|PA_2|, |A_2O|, |OB_2|, |B_2P|, |P|, |A_2|, |O|, |B_2|\},$   
 $K_3 = \{|OA_3|, |A_3Q|, |QB_3|, |B_3O|, |O|, |A_3|, |Q|, |B_3|\}$  である。

(b)  $t_K(|K_i|) = S_i \cap V$  ( $i = 1, 2, 3$ ), とくに  $t_K(P) = (0, 0, 2)$ ,  $t_K(O) = (0, 0, 0)$ ,  $t_K(Q) = (0, 0, -2)$  が成り立つ。

単体複体  $K$  が定める鎖複体の境界作用素を  $\partial_i: C_i \rightarrow C_{i-1}$ ,  $i$  次元ホモロジー群を  $H_i$  で表す。  $\dim C_0 = 9$ ,  $\dim C_1 = 12$  である。 $Y$  は連結だから  $\dim H_0 = 1$  である。これより  $\dim \operatorname{Im} \partial_1 = 8$  となり,  $\dim H_1 = 4$  を得る。

- (2) 次の (a), (b) を満たす 2 次元単体複体  $L$  と同相写像  $t_L: |L| \rightarrow X$  が存在する。

(a)  $L_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は  $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$  を満たす  $L$  の部分複体で, 次で与えられる。

$L_1$  は  $\{|PD_1E_1|, |PE_1F_1|, |PF_1D_1|, |D_1F_1Q|, |F_1E_1Q|, |E_1D_1Q|\}$  およびその面,  
 $L_2$  は  $\{|PD_2E_2|, |PE_2F_2|, |PF_2D_2|, |D_2F_2O|, |F_2E_2O|, |E_2D_2O|\}$  およびその面,  
 $L_3$  は  $\{|OD_3E_3|, |OE_3F_3|, |OF_3D_3|, |D_3F_3Q|, |F_3E_3Q|, |E_3D_3Q|\}$  およびその面である。

(b)  $t_L(|L_i|) = S_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), とくに  $t_L(P) = (0, 0, 2)$ ,  $t_L(O) = (0, 0, 0)$ ,  $t_L(Q) = (0, 0, -2)$  が成り立つ。

単体複体  $L$  が定める鎖複体の境界作用素を  $\partial_i: C_i \rightarrow C_{i-1}$ ,  $i$  次元ホモロジー群を  $H_i$  で表す。  $\dim C_0 = 12$ ,  $\dim C_1 = 27$ ,  $\dim C_2 = 18$  である。 $X$  は連結だから  $\dim H_0 = 1$  である。これより  $\dim \operatorname{Im} \partial_1 = 11$  となり,  $\dim \operatorname{Ker} \partial_1 = \dim C_1 - \dim \operatorname{Im} \partial_1 = 16$  を得る。 $H_2$  は  $L_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) の 2 次元ホモロジー群  $H_2(L_i) \cong \mathbb{R}$  の直和だから,  $\dim H_2 = 3$  である。よって  $\dim \operatorname{Im} \partial_2 = \dim C_2 - \dim \operatorname{Ker} \partial_2 = 15$  となり,  $\dim H_1 = \dim \operatorname{Ker} \partial_1 - \dim \operatorname{Im} \partial_2 = 1$  を得る。

解答を続ける場合は、この用紙の裏面に記入すること。

|     |  |
|-----|--|
| 点 数 |  |
|-----|--|

# 問題7 専門科目試験問題 数理解析系 問題および解答例

問題  $a$  を正の実数の定数とする。

(1) 複素関数  $f(z)$  を以下で定める。

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 - (1+a)iz - a}$$

$f(z)$  の極をすべて求め、それぞれの位数と、その点での留数を求めよ。

(2) 以下の積分を求めよ。ただし、積分路は実軸を動くものとする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 - (1+a)ix - a} dx$$

## 解答例

$f(z)$  の分母は  $z^2 - (1+a)iz - a = (z-i)(z-ia)$  と因数分解される。

### (1) 極, 位数, 留数

$a \neq 1$  の場合は、極は  $z = i, z = ia$  の 2 点であり、位数はどちらも 1 である。 $z = i$  における留数は  $\text{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \frac{e^{iz}}{(z-i)(z-ia)} = \frac{e^{-1}}{i(1-a)}$  であり、同様に、 $z = ia$  における留数は  $\frac{e^{-a}}{i(a-1)}$  である。

次に  $a = 1$  の場合には、 $f(z)$  の分母は  $(z-i)^2$  であるから、極は  $z = i$  のみで、位数は 2 である。このとき  $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-i)^2}$  であり、 $z = i$  における留数は  $\text{Res}_{z=i} f(z) = \frac{d}{dz} e^{iz} \Big|_{z=i} = ie^{-1}$  である。

### (2) 積分の計算

$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$  より、求める積分  $I$  は、

$$I = \frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - (1+a)ix - a} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2 - (1+a)ix - a} dx \right)$$

と書ける。

$C_1 = [-R, R]$ ,  $C_2$  を中心 0, 半径  $R$  の上半円周とする。 $C_2$  を  $z = Re^{i\theta}$ ,  $(0 \leq \theta \leq \pi)$  とおくと、

$$|e^{iz}| = \left| e^{iR(\cos \theta + i \sin \theta)} \right| = \left| e^{iR \cos \theta - R \sin \theta} \right| = e^{-R \sin \theta} \leq 1$$

なので、十分大きな  $R$  に対し、

$$\left| \int_{C_2} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in C_2} |f(z)| \cdot \text{length}(C_2) \leq \frac{\pi R}{(R-a)(R-1)} \rightarrow 0$$

よって、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - (1+a)ix - a} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1+C_2} f(z) dz$$

が成り立ち、留数定理からこの値は (1) で求めた留数の和の  $2\pi i$  倍である。

次に  $g(z) = \frac{e^{-iz}}{z^2 - (1+a)iz - a}$  とおく。同様に、 $C_1 = [-R, R]$  とし、 $C_3$  を中心 0, 半径  $R$  の下半円周とすると、 $|e^{-iz}| \leq 1$  となることに注意して、 $R \rightarrow \infty$  において

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2 - (1+a)ix - a} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} g(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1+C_3} g(z) dz$$

が成り立つが、下半平面に極は存在しないので、この値は 0 である。

以上により、

$$I = \begin{cases} \pi \frac{e^{-1} - e^{-a}}{1-a}, & (a > 0, a \neq 1), \\ -\pi e^{-1}, & (a = 1) \end{cases}$$

# I 期 問題 8 (解答例)

- (1) 平衡点は  $(0,0)$  と  $(\pm(1-p)^{-1/2}, p)$  の 3 つ.  $(0,0)$  の周りの線形化固有値は  $-p$  (重複) より,  $(0,0)$  は微分方程式系 (Eq) の局所漸近安定な平衡点である.  $(\pm(1-p)^{-1/2}, p)$  の周りの線形化行列を  $M$  とすると,  $\det M = -2p^2 < 0$ . よって,  $M$  は正の実固有値を一つ持つ (もう一つの固有値は負). 従って,  $(\pm(1-p)^{-1/2}, p)$  はともに微分方程式系 (Eq) の不安定な平衡点 (saddle) である.
- (2) 表記の簡略化のために  $(x_0, y_0) = (x, y)$  と記す.

(2a):  $xy \neq 0$  の点で

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = x(1-y)y.$$

(2b): 上の結果を利用する.  $y(x)$  を未知関数とする微分方程式として解を求める.

$$\int \frac{1}{(1-y)y} \frac{dy}{dx} dx = \int x dx$$

であるから

$$\int \frac{1}{(1-y)y} \frac{dy}{dx} dx = \int \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} \right) dy = \log \frac{|y|}{|1-y|} + C_0$$

よって,

$$\log \frac{|y|}{|1-y|} = \frac{x^2}{2} + C_1$$

より,

$$\frac{y}{1-y} = Ce^{x^2/2}, \quad C = \pm e^{C_1}.$$

従って,  $C \in \mathbb{R}$  をパラメータとする曲線の族

$$\Lambda_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = C(1-y)e^{x^2/2}\}, \quad (C \in \mathbb{R})$$

は微分方程式系 (Eq) の解曲線を与える ( $C = 0$  の場合は直線  $y = 0$  に対応). ここで,

$$H(x, y) = \frac{(1-y)e^{x^2/2}}{y}, \quad (y \neq 0)$$

と定めるとこれが求める関数である. 実際,  $(x(t), y(t))$  が  $y_0(t) = 0$  以外の (Eq) の解ならば

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) &= e^{x^2/2} \frac{-1}{y^2} \frac{dy}{dt} + \frac{1-y}{y} (xe^{x^2/2}) \frac{dx}{dt} \\ &= e^{x^2/2} \left( \frac{-x^2(1-y)y^2}{y^2} + \frac{x^2 y(1-y)}{y} \right) \\ &= 0 \quad (t \text{ について恒等的}) \end{aligned}$$

が成り立つ.

**注意**  $H(x, y)$  は一意でないで、別解もあり得る.