

入 試 年度	2026 年度	入試時期	Ⅱ期入学試験	実施日	2026 年 2 月 25 日
課程	博士前期課程	研究科	理工学研究科	専攻・コース	数学専攻
入 試 方式	一般入学試験 外国人留学生入学試験 社会人特別入学試験		試験科目	基礎科目 専門科目	
「出題の意図」					
数学の学習上必須である基礎的な素養として、線形代数と微分積分に関する十分な理解があるかを確認するため基礎問題 2 題を出題しました。また専門問題は、大学 2,3 年次に専門的に学ぶ内容に関する問いを通して、大学院進学後の学びにスムーズに移行するための準備状況を確認することを目的としています。					
「解答」または「解答例」					
別紙参照					
合否判定の方法及び基準					
入学試験は理工学研究科のアドミッションポリシーに基づき、これを満たす学生を選抜することを目的に実施しています。 本研究科のアドミッションポリシーに基づき、総合的な視点により合否を判断しています。					

2026 年度 II 期入学試験 問題及び解答用紙

課程	受験科目	明治大学大学院理工学研究科 数学専攻		
☒ 博士前期 ☐ 博士後期	☐ 英 語	受験番号	氏名	
	☒ 基礎・専門 ☐ 小論文			

問題 1. 基礎科目試験問題 線形代数

- (1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ とおく。このとき、 PAP^{-1} が対角行列となるような直交行列 P を一つ求めよ。
- (2) n_1, n_2, n_3, n_4 は、 $0 \leq n_1 < n_2 < n_3 < n_4$ を満たす整数とする。
- a) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ n_1(n_1-1) & n_2(n_2-1) & n_3(n_3-1) & n_4(n_4-1) \\ n_1(n_1-1)(n_1-2) & n_2(n_2-1)(n_2-2) & n_3(n_3-1)(n_3-2) & n_4(n_4-1)(n_4-2) \end{pmatrix}$ は正則行列であることを証明せよ。
- b) c_1, c_2, c_3, c_4 は実数とし、変数 x に関する多項式 $f(x) = c_1x^{n_1} + c_2x^{n_2} + c_3x^{n_3} + c_4x^{n_4}$ について考える。もし、 $f(x)$ が $(x-1)^4$ で割り切れるなら、 $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ であることを証明せよ。

解答欄

- (1) $|xE - A| = (x-4)^2(x+2)$ であり、 A の固有値は $4, -2$ とわかる。固有空間を求め、シュミットの直交化法を用いれば、例えば P を $\begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ の転置行列とおくと、 $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ となる。
- (2) a) この行列を M とおく。 M は行の基本変形によって $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 & n_4^2 \\ n_1^3 & n_2^3 & n_3^3 & n_4^3 \end{pmatrix}$ になり、Vandermonde の行列式の公式により、これは正則とわかる。
- b) $f(x)$ が $(x-1)^4$ で割り切れることと $\frac{d^u f}{dx^u}(1) = 0$ ($u = 0, 1, 2, 3$) は同値であり、これは $M \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を意味する。 M は正則なので、 $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ である。

解答を続ける場合は、この用紙の裏面に記入すること。

点 数	
-----	--

$f(x) = \cosh(2x^2)$, $g(x) = e^{x^2}$, $h(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ とおくとき, 以下の問に答えよ。なお, e は自然対数の底であり, $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ である。

(1) ある $\alpha \in (1, 2)$ が存在して, 区間 $1 < x < \alpha$ で $h(x) < 0$ となり, 区間 $x > \alpha$ で $h(x) > 0$ となることを示せ。

(2) 方程式 $f(x) = g(x)$ の実数解の個数を調べよ。

(3) 以下の空欄 $\boxed{\text{ア}}$ $\sim$ $\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまる数を答えよ。最終結果だけでなく, 考察の途中経過も記すこと。

$F(x, y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$, $G(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$ とおくとき, 2つの曲面 $z = F(x, y)$ と $z = G(x, y)$ で囲まれた立体の体積 V は, $p = \boxed{\text{ア}}$, $q = \boxed{\text{イ}}$, $r = \boxed{\text{ウ}}$ とおくと, (1) の α を用いて $V = (p\alpha^2 + q\alpha + r)\pi$ と表すことができる。

解答例

(1) $h(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ より, $h'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 4x^2 \left(x - \frac{3}{2}\right)$ となるから, $h(x)$ は $1 < x < 3/2$ において単調減少し, $x > 3/2$ において単調増加する。さらに, $h(1) = 0$, $h(2) = 1 > 0$ であるから, $h(x)$ は連続であることに注意して「中間値の定理」を用いると, ある $\alpha \in (3/2, 2) \subset (1, 2)$ が存在して, $h(\alpha) = 0$ となり, $1 < x < \alpha$ において $h(x) < 0$, $x > \alpha$ において $h(x) > 0$ となる。

(2) $f(x) - g(x) = \frac{e^{2x^2} + e^{-2x^2}}{2} - e^{x^2} = \frac{e^{-2x^2}}{2} \left\{ (e^{x^2})^4 - 2(e^{x^2})^3 + 1 \right\} = \frac{e^{-2x^2}}{2} h(e^{x^2})$ となり, (1) から, $x \geq 1$ の範囲で $h(x) = 0$ の解は $x = 1, \alpha$ となる。よって, $e^{x^2} \geq 1$ より $f(x) = g(x) \iff h(e^{x^2}) = 0 \iff e^{x^2} = 1, \alpha$ となる。さらに, $e^{x^2} = 1$ より $x = 0$ が得られ, $e^{x^2} = \alpha$ より $x^2 = \log \alpha$, i.e., $x = \pm \sqrt{\log \alpha}$ が得られる。ゆえに方程式 $f(x) = g(x)$ の実数解は, $x = -\sqrt{\log \alpha}, 0, \sqrt{\log \alpha}$ の 3 個である。

(3) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおけば, (1) より,

- $1 < e^{r^2} < \alpha$ ($\iff 0 < x^2 + y^2 < \log \alpha$) で $h(e^{r^2}) < 0$, i.e., $f(r) < g(r)$
- $e^{r^2} = 1$ または $e^{r^2} = \alpha$ ($\iff x^2 + y^2 = 0$ または $x^2 + y^2 = \log \alpha$) のとき, $h(e^{r^2}) = 0$, i.e., $f(r) = g(r)$
- $e^{r^2} > \alpha$ ($\iff x^2 + y^2 > \log \alpha$) で $h(e^{r^2}) > 0$, i.e., $f(r) > g(r)$

となる。よって, ここで考える立体 Ω は,

$$\Omega = \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in D, F(x, y) \leq z \leq G(x, y) \}, \quad D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \log \alpha \}$$

となるから

$$V = \iint_D \{G(x, y) - F(x, y)\} dx dy = \iint_D \left\{ g(\sqrt{x^2 + y^2}) - f(\sqrt{x^2 + y^2}) \right\} dx dy = (*)$$

を得る。 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とおくと, D に対応する領域は $K = \{ (r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{\log \alpha}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$ となるので,

$$(*) = \iint_K \{g(r) - f(r)\} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{\log \alpha}} \left(e^{r^2} - \frac{e^{2r^2} + e^{-2r^2}}{2} \right) r dr \right) d\theta = \pi \left(-\frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{3}{2}\alpha - 1 \right)$$

と求まる。(最後の等号では, (1) より $\alpha^{-2} = 2\alpha - \alpha^2$ なることを用いた。)

したがって, $\text{ア} : -\frac{1}{2}$ $\text{イ} : \frac{3}{2}$ $\text{ウ} : -1$ となる。

2026 年度 II 期入学試験 問題及び解答用紙

課程	受験科目	明治大学大学院理工学研究科 数学専攻		
☒ 博士前期 ☐ 博士後期	☐ 英 語	受験番号	氏名	
	☒ 基礎・専門 ☐ 小論文			

問題 3. 専門科目試験問題 代数系

(1) G を群, H を G の部分群とする. G の部分集合 N および C を

$$N = \{g \in G \mid Hg = gH\}, \quad C = \{g \in G \mid \text{任意の } h \in H \text{ に対し, } hg = gh\}$$

と定める. 次の問いに答えよ.

- a) N は G の部分群であることを示せ.
 - b) C は N の正規部分群であることを示せ.
- (2) C_8 を位数 8 の巡回群とする. 次の問いに答えよ.
- a) C_8 の自己同型群 $\text{Aut}(C_8)$ は巡回群ではないことを示せ.
 - b) C_8 の部分群の個数を求めよ (答えだけでなく途中の導出過程も説明せよ).

解答欄

(1a) N は G の単位元を含むので空集合ではない. よって, N が G の中で積と逆元で閉じていることを確かめればよい. $x, y \in N$ のとき, $Hxy = xHy = xyH$ であるので, N は積で閉じている. 逆元についても同様.

(1b) C が N に含まれること, 空集合でないこと, および G の中で積と逆元で閉じていることについて, C の定義から容易に確かめることができる. よって, C は N の部分群である. 次に, $x \in C, z \in N$ とする. $h \in H$ のとき, $z^{-1}hz \in H$. よって, $x \in C$ より, $(z^{-1}hz)x = x(z^{-1}hz)$. ゆえに,

$$(zxz^{-1})h(zxz^{-1})^{-1} = z(xz^{-1}hz)x^{-1}z^{-1} = z(z^{-1}hzx)x^{-1}z^{-1} = h.$$

これより, $zxz^{-1} \in C$. すなわち, C は N の正規部分群である.

(2a) 巡回群 C_8 の生成元の 1 つを g とする. すると, C_8 の生成元は g, g^3, g^5, g^7 の 4 つである. このとき, 各 $a \in \{1, 3, 5, 7\}$ に対し, $\varphi_a(g) = g^a$ となる自己同型写像 φ_a が唯一つ存在する. さらに, $\text{Aut}(C_8) = \{\varphi_1, \varphi_3, \varphi_5, \varphi_7\}$ である. 特に $\text{Aut}(C_8)$ の位数は 4 である. $a \in \{1, 3, 5, 7\}$ に対し, $a^2 \equiv 1 \pmod{8}$ であるから, $(\varphi_a)^2(g) = (g^a)^a = g^{a^2} = g$. よって, φ_a の位数は 1 または 2 である. したがって, $\text{Aut}(C_8)$ は位数 4 の元を持たず, 巡回群ではない.

(2b) C_8 の部分群の位数は 8 の約数だから, 1, 2, 4, 8 のいずれかである. 位数 1, 8 の部分群はそれぞれ $H_1 = \{g^0\}, C_8$ のみである. C_8 の位数 2 の元は g^4 のみであるから, C_8 の位数 2 の部分群は $H_2 = \{g^0, g^4\}$ のみである. C_8 の位数 4 の部分群は C_8 の生成元である g, g^3, g^5, g^7 を含まない. よって, $H_4 = \{g^0, g^2, g^4, g^6\}$ が唯一の C_8 の位数 4 の部分群である. 以上より, C_8 の部分群は H_1, H_2, H_4, C_8 の 4 つである.

解答を続ける場合は、この用紙の裏面に記入すること。

点 数	
-----	--

2026 年度 II 期入学試験 問題及び解答用紙

課程	受験科目	明治大学大学院理工学研究科 数学専攻		
☒ 博士前期 ☐ 博士後期	☐ 英 語	受験番号	氏名	
	☒ 基礎・専門 ☐ 小論文			

問題 4. 専門科目試験問題 代数系

(1) R を乗法の単位元を持つ可換環, a を R の元とする。 R のイデアル I に対し, R の部分集合 aI を $aI = \{ar \mid r \in I\}$ と定める。次の問いに答えよ。

- a) R のイデアル I に対し, aI は R のイデアルであることを示せ。
b) R が整域のとき, R のイデアル I および J に対し, 等式 $aI \cap aJ = a(I \cap J)$ を示せ。

(2) $\mathbb{Z}$ を整数全体のなす集合とする。また, $M_2(\mathbb{Z})$ を整数を成分とする 2 次正方行列全体のなす環とする。 $M_2(\mathbb{Z})$ の部分集合 A を

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

と定める。次の問いに答えよ。

- a) A は行列の和と積を演算として, 乗法の単位元を持つ可換環をなすことを示せ。
b) A は整域であることを示せ。
c) A は体ではないことを示せ。

解答欄

(1a) aI が空集合でないこと, および和と R の作用で閉じていることをそれぞれ確かめるとよい。

(1b) 二つの包含関係 $a(I \cap J) \subseteq aI \cap aJ$ と $aI \cap aJ \subseteq a(I \cap J)$ をそれぞれ確かめるとよい。前者の包含関係は容易に確かめられる。後者の包含関係については R が整域であることを用いれば確かめられる。

(2a) 2 次単位行列 I に対し, $I \in A$ 。また, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ に対し, $a \pm c, b \pm d \in \mathbb{Z}$ より,

$$\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a \pm c) & 3(b \pm d) \\ (b \pm d) & (a \pm c) \end{pmatrix} \in A.$$

複号は同順とする。また, $ac + 3bd, ad + bc \in \mathbb{Z}$ より,

$$\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + 3bd & 3(ad + bc) \\ (ad + bc) & ac + 3bd \end{pmatrix} \in A.$$

よって, A は $M_2(\mathbb{Z})$ の部分環であり, かつその積は可換である。特に A は可換環である。

(2b) A の元 M, N が $MN = O$ を満たすとする。このとき, $\det(MN) = 0$ であるから, $\det M = 0$ または $\det N = 0$ である。 $\det M = 0$ とし, $M = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \in A$ とおく。 $0 = \det M = a^2 - 3b^2$ であり, かつ a, b は整数だから $a = b = 0$ である。すなわち, $M = O$ 。同様にして, $\det N = 0$ ならば $N = O$ となる。よって, A は整域である。

(2c) $O \neq M \in A$ だが $M^{-1} \notin A$ である行列 M を与えればよい。例えば, $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると, $O \neq M \in A$ かつ

$$M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \notin A \text{ である。}$$

解答を続ける場合は、この用紙の裏面に記入すること。

点 数	
-----	--

問題 5 解答例 (略解)

- (1) 滑らかな曲面 $S \subset \mathbb{R}^3$ の 2 つの正則パラメータ表示 $\mathbf{p}(u_1, u_2)$, $\tilde{\mathbf{p}}(v_1, v_2)$ をとり, これらのパラメータの変換 $u_i = u_i(v_1, v_2)$ ($i = 1, 2$) のヤコビ行列を $J = \left(\frac{\partial u_i}{\partial v_j} \right)_{i,j=1,2}$ とおく。また, $\mathbf{p}(u_1, u_2)$ (resp. $\tilde{\mathbf{p}}(v_1, v_2)$) に対する第一基本量を E, F, G (resp. $\tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$), 第二基本量を L, M, N (resp. $\tilde{L}, \tilde{M}, \tilde{N}$) とおくと,

$$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = {}^t J \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} J, \quad \begin{pmatrix} \tilde{L} & \tilde{M} \\ \tilde{M} & \tilde{N} \end{pmatrix} = \pm {}^t J \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} J$$

が成り立つ。ガウス曲率 K は

$$K = \det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \det \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

で与えられるため, 二つのパラメータ表示から得られるガウス曲率は一致する。

- (2) 曲面 S の正則パラメータ表示 $\mathbf{p}(u_1, u_2)$ をとり, S の点 $\mathbf{p}(u_1, u_2)$ における単位法ベクトルを $\mathbf{n}(u_1, u_2)$ とおく。 S の主曲率は, 第一基本量 E, F, G および第二基本量 L, M, N が定める行列 (値関数)

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

の固有値であるため, ガウス曲率と平均曲率がともに恒等的に 0 であることは,

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = - \left(\left\langle \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_i}, \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_j} \right\rangle \right)_{i,j=1,2} \equiv 0$$

と同値である。この条件は $\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_1} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u_2} \equiv \mathbf{0}$ を意味する。つまり, 法ベクトル $\mathbf{n}$ は (u_1, u_2) によらない。 S 上の点 $\mathbf{p}_0$ をひとつ固定すると,

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \langle \mathbf{p}(u_1, u_2) - \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle = \left\langle \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_i}, \mathbf{n} \right\rangle \equiv 0, \quad i = 1, 2$$

となるので, $\langle \mathbf{p}(u_1, u_2) - \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle \equiv 0$ が成り立つ。従って, S は $\mathbf{p}_0$ を通り, $\mathbf{n}$ を法ベクトルとする平面 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (x, y, z) - \mathbf{p}_0, \mathbf{n} \rangle = 0\}$ に含まれる。

問題 6 解答例（略解）

(1) $c = \langle a_1 a_2 \rangle + \langle a_2 a_3 \rangle + \langle a_3 a_1 \rangle \in C_1(K_1)$ とおくと,

$$\begin{aligned} B_1(K) &= \mathbb{Z}(\partial\langle a_1 a_4 a_5 \rangle) \oplus \mathbb{Z}(\partial\langle a_1 a_2 a_5 \rangle) \oplus \mathbb{Z}(\partial\langle a_2 a_3 a_5 \rangle) \oplus \mathbb{Z}(\partial\langle a_3 a_5 a_6 \rangle) \\ &\quad \oplus \mathbb{Z}(\partial\langle a_3 a_6 a_1 \rangle) \oplus \mathbb{Z}(\partial\langle a_3 a_4 a_1 \rangle), \\ Z_1(K) &= \mathbb{Z}c \oplus B_1(K) \end{aligned}$$

より, $H_1(K_1) = \mathbb{Z}[c]$ は $[c]$ を基底とする階数 1 の自由加群となる。

(2) $c' := \langle b_1 b_2 \rangle + \langle b_2 b_3 \rangle + \langle b_3 b_4 \rangle + \langle b_4 b_5 \rangle + \langle b_5 b_6 \rangle + \langle b_6 b_1 \rangle \in C_1(L)$ とおくと, $H_1(L)$ は $[c']$ を基底とする階数 1 の自由加群である。また,

$$\begin{aligned} 2c - (\langle a_1 a_2 \rangle + \langle a_2 a_3 \rangle + \langle a_3 a_4 \rangle + \langle a_4 a_5 \rangle + \langle a_5 a_6 \rangle + \langle a_6 a_1 \rangle) \\ = \partial(\langle a_1 a_4 a_3 \rangle + \langle a_1 a_5 a_4 \rangle + \langle a_1 a_2 a_5 \rangle + \langle a_2 a_3 a_5 \rangle + \langle a_3 a_6 a_5 \rangle + \langle a_3 a_1 a_6 \rangle) \in B_1(K) \end{aligned}$$

より, $\varphi_*[c'] = 2[c]$ となる。

問題7 専門科目試験問題 数理解析系 問題および解答例

問題 c を正の実数として、複素平面の $\text{Im}(z) > -c$ の範囲にある $z \in \mathbb{C}$ に対し、

$$f_c(z) = \frac{\log(z + ci)}{(z - i)^2}$$

で定まる関数を考える。ただし、 $\text{Im}(z)$ は $z \in \mathbb{C}$ の虚部を表し、複素対数 $\log(z + ci)$ は上記の範囲で定義された一価の正則関数であり $z = 0$ で $\log c + \frac{\pi}{2}i$ なる値をとるものとする。

(1) $\log(z + ci)$ および $\frac{1}{(z - i)^2}$ のマクローリン級数の第 n 項を求めよ。また、 $f_c(z)$ のマクローリン級数の収束半径を求めよ。

(2) 以下の積分を求めよ。ただし、積分路は実軸とする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_c(x) dx$$

解答例

(1) 問題文で与えられた対数の枝について、対数関数の基本的性質より、

$$\log(z + ci) = \log\left(ci\left(1 + \frac{z}{ci}\right)\right) = \log(ci) + \log\left(1 + \frac{z}{ci}\right) = \log c + \frac{\pi}{2}i + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \left(\frac{z}{ci}\right)^n \quad (|z| < c)$$

である。したがって、第 0 項は $\log c + \frac{\pi}{2}i$ 、第 n 項は $\frac{(-1)^{n+1}}{n(ci)^n} z^n$ ($n \geq 1$) である。また、 $\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$ の両辺を微分して、 $\frac{1}{(1-w)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)w^n$ が得られるので、

$$\frac{1}{(z - i)^2} = \frac{1}{i^2(1 - z/i)^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{z^n}{i^n} \quad (|z| < 1)$$

から、第 n 項は $-(n+1) \frac{z^n}{i^n}$ である。これらの収束半径はそれぞれ $c, 1$ より、 $f_c(z)$ の収束半径は $\min\{1, c\}$ である。

(2) 十分大きな $R > 0$ に対し、 C_1 を実軸上の $-R$ から R への線分、 C_2 を $z = Re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) で与えられる上半円周とする。 $C_1 + C_2$ は正向きの閉曲線であり、この曲線の内部における $f_c(z)$ の特異点は $z = i$ のみであるから、留数定理より、

$$\int_{C_1+C_2} f_c(z) dz = 2\pi i \text{Res}_{z=i} f_c(z)$$

上半円周である C_2 上では、 $|\log(z + ci)| = O(\log R)$ 、 $|(z - i)^{-2}| = O(R^{-2})$ より $|f_c(z)| = O(\log R/R^2)$ であり、弧長は $O(R)$ なので、

$$\int_{C_2} f_c(z) dz = O(\log R/R) \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

$f_c(z)$ の特異点 $z = i$ は 2 位の極なので、

$$\text{Res}_{z=i} f_c(z) = \frac{d}{dz} \log(z + ci) \Big|_{z=i} = \frac{1}{(c+1)i}$$

以上から、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_c(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} f_c(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1+C_2} f_c(z) dz = 2\pi i \text{Res}_{z=i} f_c(z) = \frac{2\pi}{c+1}$$

II 期 問題 8 (解答例)

(1)

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta$$

であるから

$$\begin{aligned} \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta &= -r \cos \theta - r \sin \theta \\ \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta &= r \cos \theta - r \sin \theta \end{aligned}$$

を得る. よって,

$$\begin{cases} \dot{r} = -r, \\ \dot{\theta} = 1, \\ \dot{z} = z + r^{2n} \end{cases}$$

を得る.

(2) $(r(0), \theta(0)) = (r_0, \theta_0)$ とすると, $r(t) = r_0 e^{-t}$, $\theta(t) = \theta_0 + t$ が解である. 第3式より

$$\dot{z} = z + r_0^{2n} e^{-2nt}$$

を得る. これを解いて,

$$z(t) = z_0 e^t - \frac{(x_0^2 + y_0^2)^n}{2n+1} (e^{-2nt} - e^t).$$

(3)

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 e^{-t} \cos(t + \theta_0) \\ r_0 e^{-t} \sin(t + \theta_0) \\ \left(z_0 + \frac{(x_0^2 + y_0^2)^n}{2n+1} \right) e^t - \frac{(x_0^2 + y_0^2)^n}{2n+1} e^{-2nt} \end{pmatrix}$$

であるから

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t), z(t)) = (0, 0, 0)$$

となるのは, 初期値が

$$z_0 = -\frac{(x_0^2 + y_0^2)^n}{2n+1}$$

を満たすとき, かつそのときに限る. よって, 曲面 S_n の方程式は

$$z = -\frac{(x^2 + y^2)^n}{2n+1}$$

である.